ỨNG DỤNG EXCEL
ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Sự cạnh tranh khốc liệt trong hoạt động sản xuất kinh doanh luôn đòi hỏi các nhà quản lý doanh nghiệp phải thường xuyên lựa chọn phương án để đưa ra các quyết định nhanh chóng, chính xác và kịp thời với những ràng buộc và hạn chế về các điều kiện liên quan tới tiềm năng của doanh nghiệp, điều kiện thị trường, hoàn cảnh tự nhiên và xã hội. Việc lựa chọn phương án nào là tối ưu theo mục tiêu định trước là hết sức quan trọng. Nếu tất cả các yếu tố (biến số) liên quan đến khả năng, mục đích và quyết định lựa chọn đều có mối quan hệ tuyến tính thì chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng mô hình quy hoạch tuyến tính (QHTT) để mô tả, phân tích và tìm lời giải cho vấn đề lựa chọn tối ưu trong quản lý kinh tế. Trong môn học Toán kinh tế việc giải bài toán QHTT thực hiện bằng thuật toán đơn hình . Trong phần mềm Excel sử dụng một công cụ cài thêm là Solver có thể giải bài toán tối ưu nhanh chóng.

2.1 NHẮC LẠI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1.1 Bài toán QHTT dạng tổng quát

Bài toán QHTT dạng tổng quát là bài toán tối ưu hoá hay bài toán tìm cực trị (cực tiểu hoặc cực đại) của một hàm tuyến tính với điều kiện các biến số phải thoả mãn một hệ phương trình và (hoặc) bất phương trình tuyến tính. Mô hình toán học của bài toán QHTT tổng quát có thể viết như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x_1,...,x_2) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ (2.1)

với các ràng buộc (điều kiện):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, (i \in I_1) \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j \geq b_i, (i \in I_2) \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, (i \in I_3) \quad (2.4)$$

$$x_j \leq 0 \text{ hoặc } x_j \geq 0 \quad (2.5)$$

trong đó:

I_1, I_2, I_3 là tập các chỉ số (I_1, I_2, I_3 không giao nhau), ký hiệu $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 \cup \mathrm{I}_3$

a_{ij}, b_i, c_j với $i \in I, j = 1 \div n$ là các hằng số (có thể là tham số), n là số biến số

x_j với $j = 1 \div n$ là các biến số (ẩn số) của bài toán, (2.5) được gọi là các ràng buộc về dấu

Một số khái niệm và định nghĩa

(1) Một nhóm ràng buộc có hệ véc tơ tương ứng độc lập tuyến tính được gọi là các ràng buộc độc lập tuyến tính. Các ràng buộc dấu luôn là độc lập tuyến tính.

(2) ***Phương án:*** Một véc tơ x = $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ thoả mãn hệ ràng buộc của bài toán gọi là một phương án của bài toán.

Để phân biệt tính chất của các ràng buộc (cả ràng buộc dấu) đối với một phương án cụ thể, ta có các khái niệm ràng buộc: chặt và lỏng.

+ nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thoả mãn với dấu đẳng thức (2.2) hoặc $x_i = 0$ (nếu là ràng buộc dấu) thì ta nói phương án x thoả mãn chặt ràng buộc i hay ràng buộc i là chặt đối với phương án x.

+ nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thoả mãn với dấu bất đẳng thức (2.3), (2.4) hoặc $x_i > 0$, $x_i < 0$ (tuỳ thuộc ràng buộc loại gì) thì ta nói phương án x thoả mãn lỏng ràng buộc i hay ràng buộc i là lỏng đối với phương án x.

Ràng buộc i có dạng phương trình thì nó sẽ là chặt với mọi phương án của bài toán, nếu có dạng bất phương trình thì nó có thể là chặt đối với phương án này và là lỏng đối với phương án kia.

(3) ***Phương án tối ưu (phương án tốt nhất):*** Một phương án mà tại đó trị số hàm mục tiêu đạt cực tiểu (hoặc cực đại, tuỳ trường hợp cụ thể của f(x)) gọi là phương án tố ưu.

(4) ***Phương án tốt hơn:*** Xét bài toán có f(x)$\rightarrow$ min (max) và hai phương án x^1, x^2 của nó. Phương án x^1 gọi là tốt hơn phương án x^2 nếu $f(x^1) \leq (\geq) f(x^2)$.

Nếu có các dấu bất đẳng thức thực sự thì gọi là tốt hơn thực sự.

Một bài toán có tồn tại phương án tối ưu gọi là bài toán giải được và ngược lại nếu không có phương án tối ưu gọi là bài toán không giải được. Bài toán không giải được là do một trong hai nguyên nhân sau:

+ Bài toán không có phương án

+ Bài toán có phương án, nhưng hàm mục tiêu không bị chặn dưới nếu f(x)$\rightarrow$ min hoặc không bị chặn trên nếu f(x) $\rightarrow$ max trên tập phương án.

(5) ***Phương án cực biên (PACB):*** Một phương án thoả mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính được gọi là phương án cực biên.

Một bài toán có số ràng buộc (kể cả ràng buộc dấu nếu có) ít hơn n thì chắc chắn sẽ không có phương án cực biên dù nó có phương án.

Phương án cực biên thoả mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là *phương án cực biên không suy biến*, thoả mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là *phương án cực biên suy biến.* Nếu tất cả các phương án cực biên của bài toán đều không suy biến thì gọi là *bài toán không suy biến*, ngược lại là *bài toán suy biến*.

Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả lý thuyết cũng như thuật toán giải QHTT, người ta thường sử dụng hai dạng đặc biệt của bài toán QHTT là bài toán dạng chính tắc và bài toán dạng chuẩn.

2.1.2 Bài toán QHTT dạng chính tắc

Bài toán QHTT dạng chính tắc có dạng như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x\ ,...,x_2) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ (2.1)

với các ràng buộc: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1 \div m$ (2.6)

$x_j \geq 0, j = 1 \div n$ (2.7)

Như vậy, bài toán QHTT dạng chính tắc gồm có 2 nhóm: nhóm các ràng buộc dạng phương trình (2.6), nhóm ràng buộc dạng bất phương trình chỉ bao gồm các ràng buộc về dấu (2.7).

2.1.3 Bài toán QHTT dạng chuẩn

Bài toán QHTT dạng chuẩn có dạng như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x\ ,...,x_2) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ (2.1)

với các ràng buộc: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1 \div m$ (2.8)

$x_j \geq 0, j = 1 \div n$ (2.7)

Bài toán QHTT dạng chuẩn chỉ gồm 1 nhóm các ràng buộc dạng bất phương trình bao gồm các ràng buộc về dấu là (2.8) và (2.7).

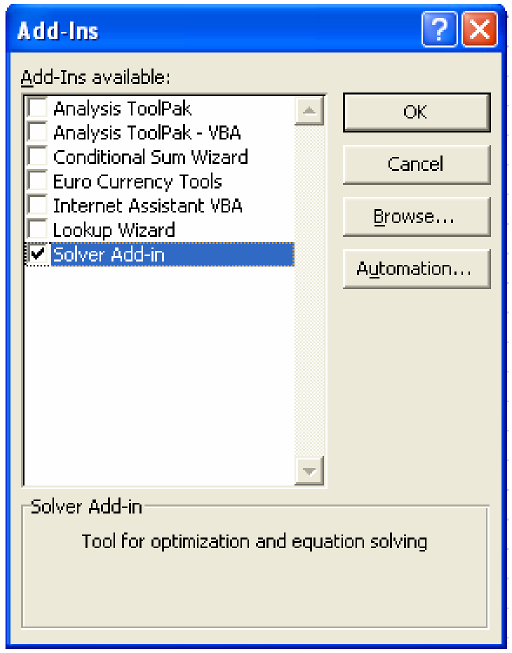
2.2 CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TRONG EXCEL

Để giải quyết các bài toán QHTT phần mềm Excel cung cấp cho chúng ta một công cụ khá hữu ích là ***Solver***. Các bài toán QHTT dạng chính tắc và dạng chuẩn chỉ là các trường hợp riêng bài toán QHTT dạng tổng quát. Vì thế ở đây ta sẽ xem xét cách giải quyết bài toán QHTT dạng tổng quát rồi từ đó áp dụng tương tự cho hai dạng còn lại.

2.2.1 Cài thêm công cụ Add-ins Solver

Vào thực đơn ***Tools\ Solver***. Nếu chưa thấy chức năng Solver trên thực đơn Tools thì ta cần bổ sung chức năng này vào Excel. Các bước tiến hành:

(1) Vào menu ***Tools\ Add-Ins***, xuất hiện cửa sổ:



Hình 2.1 Hộp thoại Add-ins chứa các chức năng mở rộng của Excel

(2) Chọn ***Solver Add-Ins*** và chọn ***OK.***

2.2.2 Xây dựng bài toán trong Excel

Việc xây dựng bài toán trong Excel cũng tương tự như việc xây dựng bài toán khi chúng ta tiến hành giải thủ công thông thường. Sau khi phân tích đầu bài chúng ta cần viết được hàm mục tiêu và các ràng buộc của bài toán rồi tiến hành tổ chức dữ liệu vào bảng tính. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.1: Cho bài toán QHTT sau:

Hàm mục tiêu: $f(x) = 2x_1+8x_2-5x_3+15x_4 \rightarrow \max$

với ràng buộc:

$$3x_1-x_2+x_3+10x_4=5$$

$$x_1+2x_2+x_3+5x_4 \geq 9$$

$$2x_1+10x_2+2x_3-5x_4 \leq 26$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \div 4$$

Tổ chức dữ liệu trên bảng tính:

➢ *Biến quyết định:* được nhập tại các ô **B7:E7**. Cho các giá trị khởi động là 0.

➢ *Hàm mục tiêu f(x):* có giá trị căn cứ vào giá trị khởi động của các biến. Công thức tại ô **F8**.

➢ *Các ràng buộc:* nhập các hệ số của các quan hệ ràng buộc tại các ô **B10:E12**. Tính vế trái của các ràng buộc theo công thức tại các ô **F10:F12.** Nhập các giá trị vế phải của các ràng buộc tại các ô **G10:G12**.

Theo bảng sau:

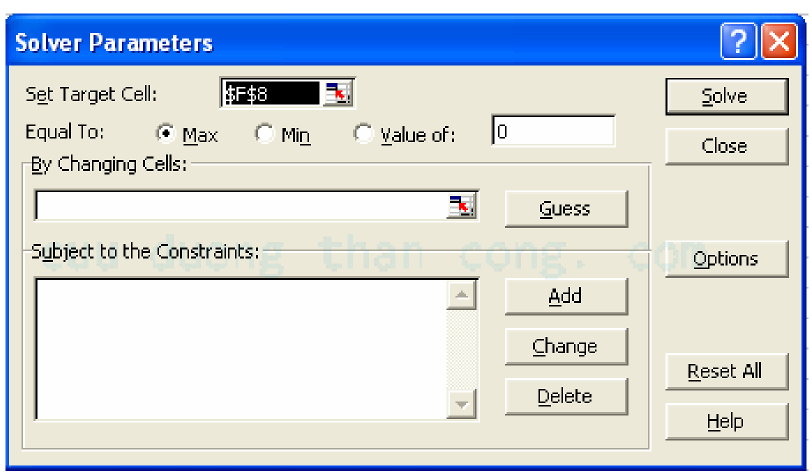
	A	B	C	D	E	F	G
4	Ví dụ giải bài toán QHTT						
5							
6	Các biến	x1	x2	x3	x4		
7		0	0	0	0	Hàm mục tiêu	
8	Hệ số của hàm mục tiêu	2	8	-5	15	0	
9	Các ràng buộc					Vế trái	Vế phải
10	R1	3	-1	1	10	0	5
11	R2	1	2	1	5	0	9
12	R3	2	10	2	-5	0	26
13	Các công thức						
14	Hàm mục tiêu		F8 = B8*$B$7+C8*$C$7+D8*$D$7+E8*$E$7				
15	Các ràng buộc		F10 = B10*$B$7+C10*$C$7+D10*$D$7+E10*$E$7				
16			F11 = =B11*$B$7+C11*$C$7+D11*$D$7+E11*$E$7				
17			F12 = B12*$B$7+C12*$C$7+D12*$D$7+E12*$E$7				

Hình 2.2 Tổ chức bài toán trên bảng tính

Sau khi nạp xong dữ liệu vào bảng tính ta tiến hành giải bài toán.

2.2.3 Tiến hành giải bài toán

(1) Chọn ô **F8** và chọn **Tools\ Solver**. Bảng hộp thoại **Solver Parameters** xuất hiện và gồm các thông số sau:



Hình 2.3 Hộp thoại khai báo các thông số cho Solver

Trong đó:

Set Tanget Cell: Nhập ô chứa địa chỉ tuyệt đối của hàm mục tiêu.

Equal To: Xác định giới hạn cho hàm mục tiêu hoặc giá trị cần đạt đến của hàm mục tiêu: Max, Min hay Value of tuỳ thuộc vào yêu cầu của bài.

By Changing Cells: Nhập địa chỉ tuyệt đối của các ô ghi các giá trị ban đầu của biến.

Subject to the Constraints: Nhập các ràng buộc của bài toán.

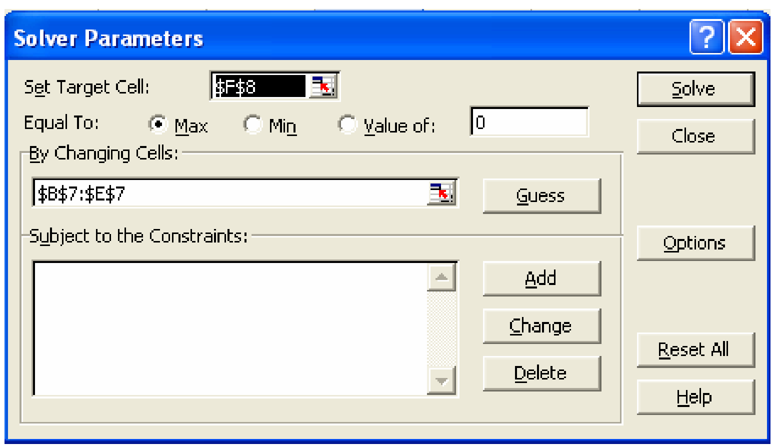
Cách làm của Solver là thay đổi giá trị của các biến tại ***By Changing Cells*** cho đến lúc giá trị của hàm mục tiêu tại ***Set Tanget Cell*** đạt một giá trị quy định tại ***Equal To*** và đồng thời thoả mãn tập các ràng buộc tại ***Subject to the Constraints***.

Với ví dụ 2.1 ta tiến hành khai báo các thông số cho Solver như sau:

➢ Địa chỉ của hàm mục tiêu **F8** được đưa vào ***Set Target Cell***

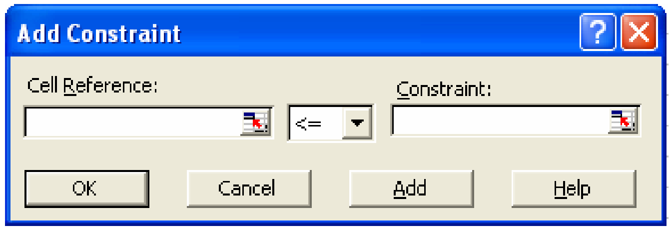
➢ Chọn ***Max*** tại ***Equal To*** để Solver tìm lời giải cực đại cho hàm mục tiêu.

➢ Nhập địa chỉ của các biến quyết định **B7:E7** tại ***By Changing Cells.***



Hình 2.4 Khai báo hàm mục tiêu và các biến

➢ Thêm các ràng buộc vào ***Subject to the Contraints***: Nhấp nút **Add,** bảng **Add Constraint** xuất hiện và gồm các thông số sau:



Hình 2.5 Hộp thoại thêm các ràng buộc

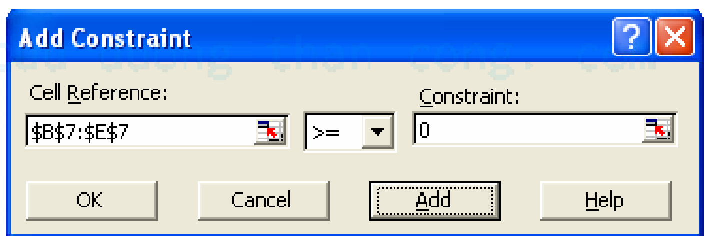
Cell Reference: Ô hoặc vùng ô chứa công thức của các ràng buộc.

Ô dấu: Cho phép ta lựa chọn dấu của các ràng buộc tương ứng.

Constraint: Ô chứa giá trị vế phải của các ràng buộc tương ứng (ta cũng có thể nhập trực tiếp giá trị vế phải của ràng buộc tương ứng).

Với ví dụ 2.1 các ràng buộc được nhập như sau:

+ Các ràng buộc về dấu: do $x_j \geq 0, j = 1 \div 4$ (các ràng buộc đều có dạng $\geq$) nên ta chọn vùng địa chỉ chứa biến **B7:E7** vào **Cell Reference**, chọn dấu $\geq$ và nhập **0** vào **Constraint**:



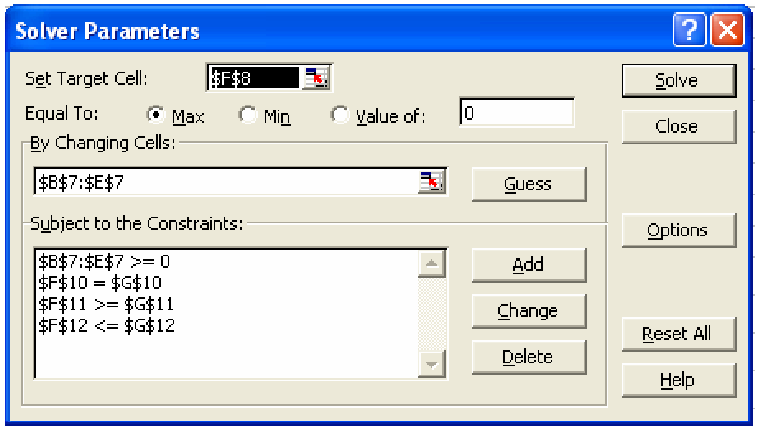
Hình 2.6 Thêm các ràng buộc

Chú ý: Nếu bài yêu cầu ràng buộc (x_j) là nguyên thì trong ô dấu ta chọn ***int***, nếu là kiểu nhị phân ta chọn ***bin***.

+ Tiếp tục chọn **Add** để nhập tiếp các ràng buộc phương trình và bất phương trình:

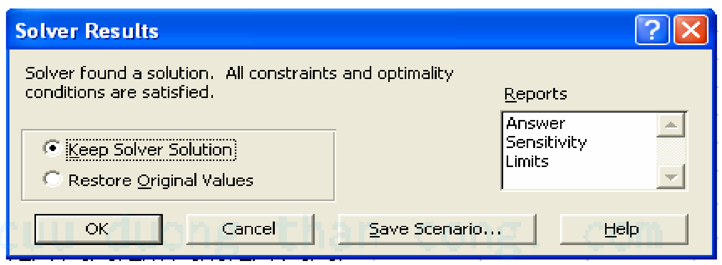
Cell Reference		Constraint
F10	=	G10
F11	>=	G11
F12	<=	G12

Chọn **OK** để kết thúc việc khai báo các ràng buộc. Tuy nhiên, muốn hiệu chỉnh ràng buộc ta chọn ràng buộc và chọn ***Change***, xoá ràng buộc ta chọn ràng buộc từ danh sách ***Subject to the Contraints*** và nhấp ***Delete***.



Hình 2.7 Khai báo các thông số của bài toán

➢ Sau khi hoàn tất ta chọn **Solve** để chạy **Solver**, hộp thoại kết quả xuất hiện và cho ta hai sự lựa chọn sau:



Hình 2.8 Chọn kiểu báo cáo

Keep Solver Solution: Giữ kết quả và in ra bảng tính.

Restore Original Values: Huỷ kết quả vừa tìm được và trả các biến về tình trạng ban đầu.

Save Scenario: Lưu kết quả vừa tìm được thành một tình huống để có thể xem lại sau này.

Ngoài ra có 3 loại báo cáo là ***Answer, Sensitivity*** và ***Limits.***

Ở ví dụ 2.1 ta chọn **Keep Solver Solution, OK.** Bảng kết quả nhận được như sau:

	A	B	C	D	E	F	G
4	Ví dụ giải bài toán QHTT						
5							
6	Các biến	x1	x2	x3	x4		
7		0	3	0	0.8	Hàm mục tiêu	
8	Hệ số của hàm mục tiêu	2	8	-5	15	36	
9	Các ràng buộc					Vế trái	Vế phải
10	R1	3	-1	1	10	5	5
11	R2	1	2	1	5	10	9
12	R3	2	10	2	-5	26	26

Như vậy phương án cực biên tìm được là X=(0,3,0,0.8) và giá trị cực đại của hàm mục tiêu f(x) là 36.

2.2.4 Giải thích thuật ngữ

Tuy nhiên để tiện cho việc phân tích kết quả thì trong bảng **Solver Results** ta chọn thêm mục ***Answer Reports*** khi đó bảng kết quả nhận được của ví dụ 2.1 như sau:

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$8	Hệ số của hàm mục tiêu Hàm mục tiêu	0	36

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$7	x1	0	0
$C$7	x2	0	3
$D$7	x3	0	0
$E$7	x4	0	0.8

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$F$10	R1 Vế trái	5	$F$10=$G$10	Not Binding	0
$F$11	R2 Vế trái	10	$F$11>=$G$11	Not Binding	1
$F$12	R3 Vế trái	26	$F$12<=$G$12	Binding	0
$B$7	x1	0	$B$7>=0	Binding	0
$C$7	x2	3	$C$7>=0	Not Binding	3
$D$7	x3	0	$D$7>=0	Binding	0
$E$7	x4	0.8	$E$7>=0	Not Binding	0.8

Ta cần phải nắm vững một số thuật ngữ sau:

Original Value: Giá trị ban đầu.

Final Value: Giá trị cuối cùng.

Formula: Công thức tính.

Status: Trạng thái.

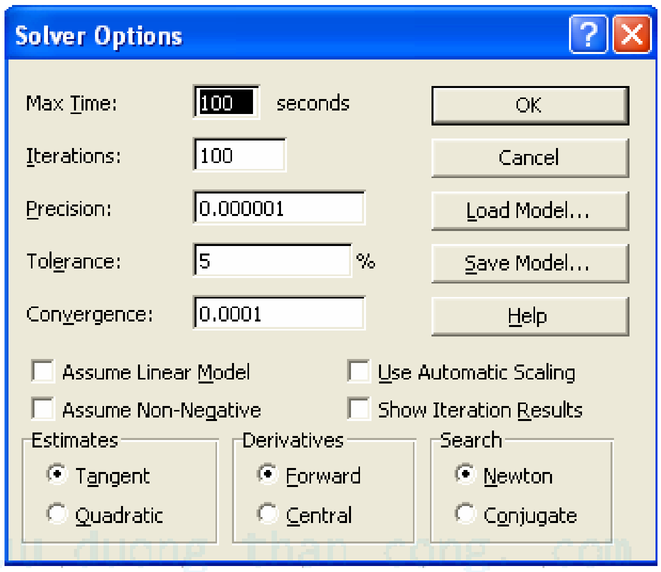
Binding: Ràng buộc chặt.

Not Binding: Ràng buộc không chặt (ràng buộc lỏng).

2.3 CÁC LỰA CHỌN KHI GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.3.1 Các lựa chọn

Để thiết lập các thuộc tính cho **Solver** thì trong bảng **Solver Parameters** ta nhấp chuột vào ***Options*** hộp thoại ***Solver Options*** cho ta các lựa chọn sau:



Hình 2.9 Thiết lập các thuộc tính cho Solver

Max Time: Thời gian tối đa để giải bài toán là 32.767 giây (mặc định là 100 giây cho các bài toán đơn giản).

Iterations: Số lần lặp tối đa để giải các bài toán là 32.767 lần(mặc định là 100 lần).

Precision: Độ chính xác của bài toán (từ 0 đến 1, mặc định là 0.000001, giá trị càng gần với 0 thì độ chính xác càng cao). Giá trị này điều chỉnh độ sai số cho tập ràng buộc.

Tolerance: Chỉ áp dụng đối với các bài toán có ràng buộc nguyên. Nhập vào sai số có thể chấp nhận được. Sai số càng lớn thì tốc độ giải càng nhanh (mặc định là 5%)

Convergence: Chỉ áp dụng đối với các bài toán không tuyến tính. Khi tỉ số của giá trị tính toán ban đầu của ô đích đến giá trị tính toán hiện hành ít hơn giá trị đồng quy Solver ngừng việc tìm kiếm dù có tìm thấy lời giải hay không.

Giá trị nằm trong khoảng từ 0 đến 1. Giá trị càng gần 0 thì độ chính xác càng cao và cần nhiều thời gian hơn (mặc định là 0.0001).

Assume Linear Model: Khi tất cả quan hệ trong mô hình là tuyến tính thì chọn mục này để tăng tốc độ giải bài toán.

Assume Non-Negative: Chọn tuỳ chọn này nếu muốn giả định tất cả các biến của bài toán đều không âm.

Use Automatic Scaling: Chọn tuỳ chọn này khi ô đích và ô thay đổi có sự khác nhau lớn. Solver sẽ tự động điều chỉnh các biến để tìm ra lời giải. Chẳng hạn như bài toán tối đa % lợi nhuận trên hàng triệu đồng vốn đầu tư.

Show Iteration Results: Chọn tuỳ chọn này nếu muốn Solver tạm dừng lại và hiển thị kết quả sau mỗi lần lặp.

Ba tính năng nâng cao điều khiển cho Solver:

Estimates: Chọn phương pháp cho Solver ước lượng các biến

- *Tangent:* Sử dụng cách xấp xỉ tuyến tính bậc nhất.

- *Quandratic:* Sử dụng cách xấp xỉ bậc bốn.

Derivatives: Chọn cách để ước lượng hàm mục tiêu và các ràng buộc

- *Forward:* Dùng khi giá trị của các ràng buộc biến đổi chậm (được dùng phổ biến).

- *Central:* Dùng khi giá trị của các ràng buộc biến đổi nhanh và khi Solver báo không thể cải tiến kết quả thu được.

Search: Quy định giải thuật tìm kiếm kết quả cho bài toán

- *Newton:* là phương pháp mặc định, sử dụng nhiều bộ nhớ và có số lần lặp ít.

- *Conjugate:* cần ít bộ nhớ hơn phương pháp *Newton* nhưng số lần lặp thì nhiều hơn. Được sử dụng khi giải các bài toán phức tạp và bộ nhớ máy tính có giới hạn.

Save Model: Chọn nơi lưu mô hình bài toán. Sử dụng khi muốn lưu nhiều mô hình trên một worksheet. Mô hình đầu tiên đã được lưu tự động.

Load Model: Xác định vùng địa chỉ của mô hình bài toán cần nạp vào.

2.3.2 Hạn chế khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính trong Excel

Hạn chế của bài trình cài thêm Solver là chỉ giải được các bài toán có tối da là 16 biến số. Mặt khác số lần lặp tối đa để giải bài toán là 32767, thời gian tối đa để giải bài toán là 32767…nên bên cạnh đó nó còn tồn tại một số mặt hạn chế nhất định về quy mô của bài toán và khó khăn trong việc tìm miền tối ưu.

Đối với những bài toán tối ưu có quy mô lớn ta có thể sử dụng phần mềm Lindo đây là một phần mềm tin học rất mạnh trong lĩnh vực này.

2.4 MỞ RỘNG BÀI TOÁN

Việc ứng dụng mô hình QHTT trong quản lý kinh tế và quản trị doanh nghiệp là rất phổ biến. Chúng ta thường bắt gặp mô hình này trong các bài toán như: bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu cho doanh nghiệp, bài toán phân bổ vốn đầu tư, bài toán dự trữ…Tuy nhiên trong phần này xin trình bày ra đây 2 loại bài toán QHTT thông dụng nhất là: bài toán nguyên vật liệu và bài toán vận tải.

2.4.1 Bài toán nguyên vật liệu

➢ ***Bài toán tổng quát***

Một nhà máy có khả năng sản xuất n loại sản phẩm. Để sản xuất các sản phẩm này cần phải sử dụng m loại nguyên vật liệu. Biết rằng:

a_{ij} là lượng nguyên vật liệu loại i cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j

b_i là dự trữ nguyên vật liệu loại i

c_j là lợi nhuận từ việc bán một đơn vị sản phẩm loại j

với $i = \overline{1,m}$ và $j = \overline{1,n}$

Bài toán được mô tả theo bảng sau:

	S_1	S_2	…	S_j	…	S_n	Dự trữ
NVL1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
NVL2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…

NVL_i	a_{i1}	a_{i2}	…	$\boldsymbol{a_{ij}}$	…	a_{in}	$\boldsymbol{b_i}$
…	…	…	…	…	…	…	…
NVL_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Lợi nhuận đơn vị	c_1	c_2	…	$\boldsymbol{c_j}$	…	c_n	

Hãy tìm phương án sản xuất để tối đa hoá lợi nhuận.

Bài giải:

Gọi $\boldsymbol{x_j}$ là lượng sản phẩm loại ***j*** mà nhà máy sẽ sản xuất nên $x_j \geq 0$.

Do đó phương án sản xuất của nhà máy là vectơ x=(x_1, x_2,…,x_j,..,x_n).

Khi đó:

Tổng chi phí nguyên vật liệu loại ***i*** để sản xuất x là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ sẽ không vượt quá dự trữ $\boldsymbol{b_i}$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$

Tổng lợi nhuận thu được khi sản xuất x là $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Vậy mô hình toán học của bài toán nguyên vật liệu có thể phát biểu theo mô hình bài toán QHTT như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$

Các ràng buộc: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i=\overline{1,m}$

$x_j \geq 0, j=\overline{1,n}$

Việc giải bài toán nguyên vật liệu trong Excel cũng bao gồm 2 bước:

B1: Xây dựng bài toán (lập bài toán và tổ chức dữ liệu trên bảng tính).

B2: Tiến hành giải bài toán bằng cách chạy Solver theo trình tự như trên.

Ta xét một ví dụ cụ thể sau:

➢ ***Ví dụ 2.2***

Một nhà máy dự định tiến hành sản xuất 5 loại sản phẩm S_j ($j = \overline{1,5}$). Cả 5 loại sản phẩm này đều sử dụng 4 loại nguyên vật liệu chính NVL_i ($i = \overline{1,4}$). Có mức tiêu hao nguyên vật liệu, lợi nhuận đơn vị thu được và giới hạn dự trữ như sau:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Dự trữ
NVL_1	2	5	6	8	4	*1200*
NVL_2	3	1	5	6	1	*800*
NVL_3	7	5	4	5	2	*2000*
NVL_4	8	5	7	9	1	*1865*
Lợi nhuận đơn vị	*300*	*250*	*500*	*150*	*320*	

Hãy xây dựng phương án sản xuất để nhà máy đạt được tổng lợi nhuận lớn nhất.

Bài giải:

B1: Xây dựng bài toán

Gọi x_j với j=1,5 là sản lượng sản phẩm loại j sẽ sản xuất. (x_j>=0)

Nên phương án sản xuất của nhà máy là vectơ x = (x_1, x_2, x_3 , x_4, x_5).

Hàm mục tiêu: $f(x) = 300x_1 + 250x_2 + 500x_3 + 150x_4 + 320x_5 \rightarrow \max$

Các ràng buộc:

$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 4x_5 \le 1200$

$3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_5 \le 800$

$7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 \le 2000$

$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + x_5 \le 1865$

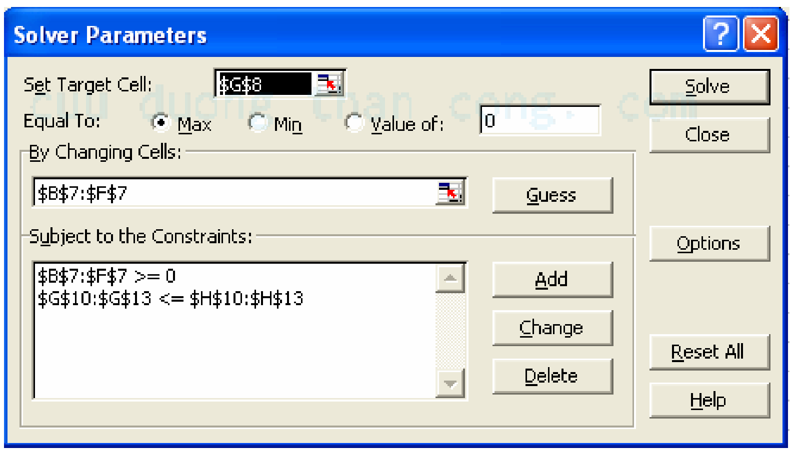
Bài toán được tổ chức trên bảng tính như sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	Bài toán nguyên vật liệu: Lập phương án sản xuất để tối đa hoá lợi nhuận								
5									
6		S1	S2	S3	S4	S5			
7	lượng sp	0	0	0	0	0	Hàm mục tiêu		
8	Lợi nhuận đv	300	250	500	150	320	0		
9	Các ràng buộc						Vế trái	Vế phải	
10	R1	2	5	6	8	4	0	1200	
11	R2	3	1	5	6	1	0	800	
12	R3	7	5	4	5	2	0	2000	
13	R4	8	5	7	9	1	0	1865	
14									
15	Công thức	Hàm mục tiêu		G8 = B8*$B$7+C8*$C$7+D8*$D$7+E8*$E$7+F8*$F$7					
16		Vế trái của các RB		G10 = B10*$B$7+C10*$C$7+D10*$D$7+E10*$E$7+F10*$F$7					
17				G11 = B11*$B$7+C11*$C$7+D11*$D$7+E11*$E$7+F11*$F$7					
18				G12 = B12*$B$7+C12*$C$7+D12*$D$7+E12*$E$7+F12*$F$7					
19				G13 = B13*$B$7+C13*$C$7+D13*$D$7+E13*$E$7+F13*$F$7					

Hình 2.10 Lập bài toán trên bảng tính

B2: Giải bài toán:

- Chọn ô G8 rồi thực hiện lệnh *Tools\ Solver,* điền đầy đủ thông tin vào hộp thoại *Solver Parameters* như sau*:*



Hình 2.11 Khai báo các thông số của bài toán

- Nhấn *Solver để thực* hiện việc chạy Solvers. Trong bảng hộp thoại kết quả *Solver Results* tích chọn mục *Keep Solver Solution* và chọn thêm báo cáo *Answer Report* ta nhận được kết quả:

Microsoft Excel 10.0 Answer Report
Worksheet: [VD_C2.XLS]vd22
Report Created: 08/31/06 11:43:26 PM

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$G$8	Lợi nhuận đv Hàm mục tiêu	0	124000

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$7	lượng sp S1	0	200
$C$7	lượng sp S2	0	0
$D$7	lượng sp S3	0	0
$E$7	lượng sp S4	0	0
$F$7	lượng sp S5	0	200

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$G$10	R1 Vế trái	1200	$G$10<=$H$10	Binding	0
$G$11	R2 Vế trái	800	$G$11<=$H$11	Binding	0
$G$12	R3 Vế trái	1800	$G$12<=$H$12	Not Binding	200
$G$13	R4 Vế trái	1800	$G$13<=$H$13	Not Binding	65
$B$7	lượng sp S1	200	$B$7>=0	Not Binding	200
$C$7	lượng sp S2	0	$C$7>=0	Binding	0
$D$7	lượng sp S3	0	$D$7>=0	Binding	0
$E$7	lượng sp S4	0	$E$7>=0	Binding	0
$F$7	lượng sp S5	200	$F$7>=0	Not Binding	200

Phương án tối ưu (phương án cực biên) là x = (200, 0, 0, 0, 200) với f(x) max = 124 000. Hay phương án sản xuất tối ưu của nhà máy là sản xuất 200 đơn vị sản phẩm 1 và 200 đơn vị sản phẩm 5 khi đó lợi nhuận tối ưu đạt được là 124 000 đơn vị tiền tệ. Không có nguyên liệu nào bị lãng phí.

2.4.2 Bài toán vận tải

➢ ***Bài toán tổng quát:***

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hoá, lượng hàng có ở kho i là a_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng nói trên, với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là b_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Biết $\boldsymbol{c_{ij}}$ là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho $\boldsymbol{i}$ đến điểm tiêu thụ $\boldsymbol{j}$.

Bài toán được mô tả theo bảng sau:

	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	Dự trữ
K_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
K_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
K_i	c_{i1}	c_{i2}	…	$\boldsymbol{c_{ij}}$	…	c_{in}	$\boldsymbol{a_i}$
…	…	…	…	…	…	…	…
K_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Nhu cầu tiêu thụ	b_1	b_2	…	$\boldsymbol{b_j}$	…	b_n	

Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng từ các kho đến các điểm tiêu thụ sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Bài giải:

Gọi $\boldsymbol{x_{ij}}$ là lượng hàng vận chuyển từ kho $\boldsymbol{i}$ đến điểm tiêu thụ $\boldsymbol{j}$ nên $x_{ij} \geq 0, i = m, j = \overline{1,n}$. Ta có:

Tổng chi phí vận chuyển: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Lượng hàng vận chuyển khỏi kho $\boldsymbol{i}$: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$

Lượng hàng vận chuyển đến điểm tiêu thụ $\boldsymbol{j}$: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

Như vậy mô hình toán học của bài toán vận tải có thể viết dưới dạng bài toán QHTT như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$

Các ràng buộc: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Ta thấy ngay được điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải có phương án tối ưu là tổng tất cả các lượng hàng tiêu thụ bằng tổng tất cả các lượng hàng ở các kho, nghĩa là: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Cũng giống như bài toán nguyên vật liệu để tiến hành giải bài toán trong Excel ta cần phải trải qua 2 bước là: xây dựng bài toán và tiến hành chạy Solver. Xét ví dụ cụ thể sau:

➢ ***Ví dụ 2.3***

Sử dụng công cụ Solver như đã trình bày ở trên hãy lập phương án vận chuyển xăng tối ưu từ 4 kho đến 5 trạm xăng bán lẻ của một công ty kinh doanh xăng dầu khu vực V.

Bài giải:

B1: Xây dựng bài toán

Gọi $\boldsymbol{x_{ij}}$ là lượng hàng vận chuyển từ kho $\boldsymbol{i}$ đến điểm tiêu thụ $\boldsymbol{j}$ nên $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,5}$.

Hàm mục tiêu: $f(x) = 30x_{11} + 27x_{12} + 26x_{13} + 9x_{14} + 23x_{15} + 13x_{21} + 4x_{22} + 22x_{23} + 3x_{24} + x_{25} + 3x_{31} + x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 24x_{35} + 16x_{41} + 30x_{42} + 17x_{43} + 10x_{44} + 16x_{45} \rightarrow \min$

Các ràng buộc:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} <= 4$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} <= 6$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} <= 10$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} <= 10$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} <= 7$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} <= 7$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} <= 7$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} <= 7$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} <= 2$

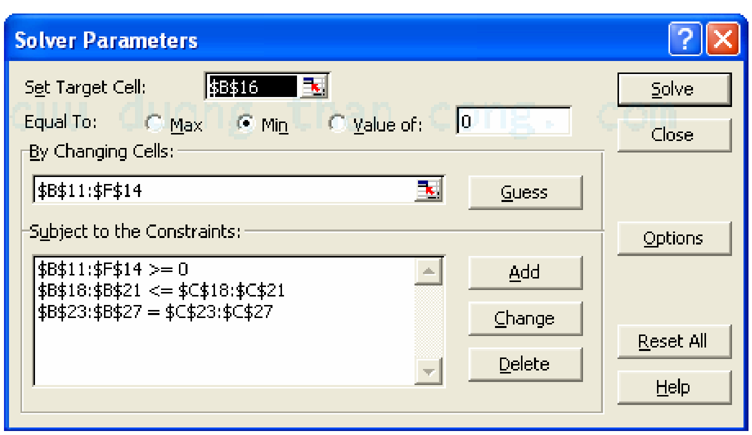
Tổ chức dữ liệu trên bảng tính như sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Lập phương án vận chuyển xăng từ 4 kho đến 5 trạm bán lẻ								
2	để tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất								
3									
4		**d1**	**d2**	**d3**	**d4**	**d5**	***dự trữ***		
5	**k1**	30	27	26	9	23	***4***		
6	**k2**	13	4	22	3	1	***6***		
7	**k3**	3	1	5	4	24	***10***		
8	**k4**	16	30	17	10	16	***10***		
9	***nhu cầu tiêu thụ***	***7***	***7***	***7***	***7***	***2***			
10									
11	lượng xăng vc	0	0	0	0	0			
12		0	0	0	0	0			
13		0	0	0	0	0			
14		0	0	0	0	0			
15									
16	Hàm mục tiêu	0		Công thức	B16 = SUMPRODUCT($B$11:$F$14,B5:F8)				
17	Các ràng buộc	vế trái	vế phải						
18	r1	0	4		B18 = SUM(B11:F11)				
19	r2	0	6		B19 = SUM(B12:F12)				
20	r3	0	10		B20 = SUM(B13:F13)				
21	r4	0	10		B21 = SUM(B14:F14)				
22	*Tổng*		***30***						
23	r5	0	7		B23 = SUM(B11:B14)				
24	r6	0	7		B24 = SUM(C11:C14)				
25	r7	0	7		B25 = SUM(D11:D14)				
26	r8	0	7		B26 = SUM(E11:E14)				
27	r9	0	2		B27 = SUM(F11:F14)				
28	*Tổng*		***30***						

Hình 2.12 Tổ chức bài toán trên bảng tính

Bước 2: Tiến hành giải bài toán

Chọn ô *B16* rồi dùng lệnh *Tools\Solver*



Hình 2.13 Khai báo các thông số của bài toán

Sau khi nhập đầy đủ thông tin vào bảng *Solver Parameters* ta chọn *Solve\Keep Solver Solution ,OK***.** Ta được bảng kết quả sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10									
11	lượng hàng vc	0	0	0	4	0			
12		0	4	0	0	2			
13		7	3	0	0	0			
14		0	0	7	3	0			
15									
16	Hàm mục tiêu	227		Công thức	B16 = SUMPRODUCT($B$11:$F$14,B5:F8)				
17	Các ràng buộc	vế trái	vế phải						
18	r1	4	4		B18 = SUM(B11:F11)				
19	r2	6	6		B19 = SUM(B12:F12)				
20	r3	10	10		B20 = SUM(B13:F13)				
21	r4	10	10		B21 = SUM(B14:F14)				
22	*Tổng*		*30*						
23	r5	7	7		B23 = SUM(B11:B14)				
24	r6	7	7		B24 = SUM(C11:C14)				
25	r7	7	7		B25 = SUM(D11:D14)				
26	r8	7	7		B26 = SUM(E11:E14)				
27	r9	2	2		B27 = SUM(F11:F14)				
28	*Tổng*		*30*						

Phân tích kết quả:

Vậy phương án vận chuyển là:

x = (0,0,0,4,0,0,4,0,0,2,7,3,0,0,0,0,0,7,3,0)

Vì tổng lượng xăng dự trữ ở các kho bằng tổng nhu cầu xăng ở các trạm (30) nên phương án tìm được là phương án tối ưu.

Chú ý 1: Nếu muốn có bảng kết quả chi tiết để phân tích thì trong bảng *Solver Results* ta chọn thêm mục *Reports\ Answer* (hoặc\và *Sensitivity* hoặc\và *Limits*) tuỳ thuộc vào mức độ chi tiết yêu cầu của bài.

Chú ý 2: Đối với những bài toán chưa tìm được lời giải mong muốn ta có thể thay đổi các thông số đầu vào của bài toán rồi chọn Tools\ Solver để tìm ra phương án tối ưu.

2.5 ỨNG DỤNG EXCEL ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính là hệ ***m*** phương trình đại số bậc nhất đối với ***n*** ẩn số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \qquad (*) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{1m}x_n = b_1 \end{cases}$$

với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số; a_{ij} là hệ số ở phương trình thứ i của ẩn x_j; b_i là vế phải của phương trình.

Khi m = n ta có hệ phương trình vuông với n phương trình n ẩn.

Khi $b_i = 0$ ta có một hệ thuần nhất.

Toán học đã cung cấp cho chúng ta khá nhiều phương pháp để giải các hệ phương trình tuyến tính như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp ma trận - định thức …Phần mềm Excel cũng cung cấp cho ta hai công cụ rất dễ dàng, nhanh chóng và chính xác để tiến hành giải hệ phương trình tuyến tính là: sử dụng trình cài thêm ***Solver*** và sử dụng kết hợp hai hàm ***MINVERSE*** và ***MMULT***.

2.5.1 Giải hệ phương trình bằng Solver

Ngoài ứng dụng để giải các bài toán QHTT ***Solver*** còn có thể ứng dụng để giải các bài toán về hệ phương trình. Khi đó chỉ có các ràng buộc dạng phương trình và không có hàm mục tiêu. Các bước tiến hành giải hệ phương trình hoàn toàn tương như khi giải bài toán QHTT. Để hiểu hơn ta tiến hành xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Bước 1: Tổ chức dữ liệu vào bảng tính

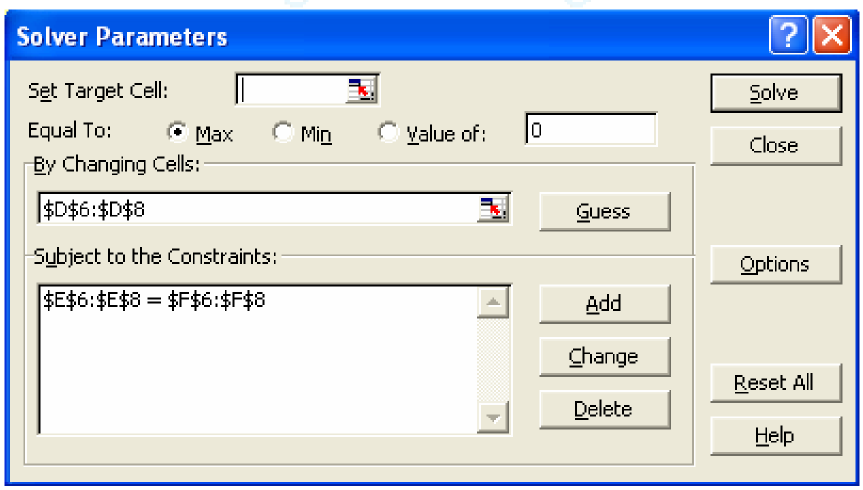
Nhập các hệ số, vế phải của phương trình và cho giá trị khởi động cho các biến vào bảng tính như hình sau:

	A	B	C	D	E	F
2						
3	Cách 1: ghpt bằng Solver					
4						
5	ax	by	cz	biến	vế trái	vế phải
6	2	4	3	1	9	4
7	3	1	-2	1	2	-2
8	4	11	7	1	22	7
9						
10	Công thức					
11						
12	E6 = A6*$D$6+B6*$D$7+C6*$D$8					
13	E7 = A7*$D$6+B7*$D$7+C7*$D$8					
14	E8 = A8*$D$6+B8*$D$7+C8*$D$8					
15						
16	hoặc					
17	E6 = SUMPRODUCT(A6:C6,TRANSPOSE($D$6:$D$8))					
18	E7 = SUMPRODUCT(A7:C7,TRANSPOSE($D$6:$D$8))					
19	E8 = SUMPRODUCT(A8:C8,TRANSPOSE($D$6:$D$8))					

Hình 2.14 Lập bài toán trên bảng tính

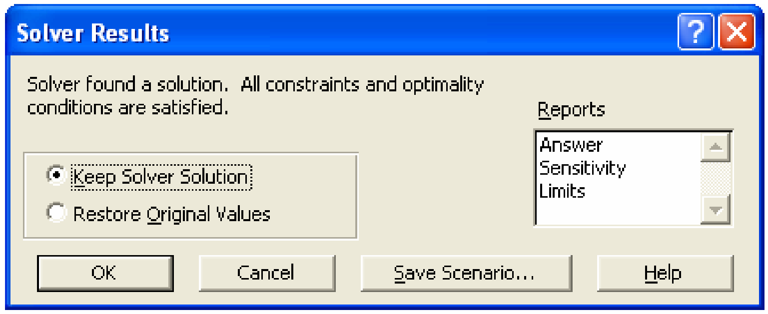
Bước 2: Giải hệ phương trình

Chọn ***Tools\ Solver, OK***. Rồi tiến hành điền đầy đủ thông tin vào hộp thoại ***Solver Paraments*** (bỏ trống mục ***Set Target Cell***).



Hình 2.15 Khai báo các thông số của bài toán

Sau khi điền đầy đủ thông tin ta nhấp ***Solve***. Trong bảng hộp thoại ***Solver Results*** ta kiểm vào ***Keep Solver Solution*** để lưu kết quả trên bảng tính.



Hình 2.16 Chọn loại báo cáo

Chọn ***OK*** để hoàn tất quá trình chạy Solver**.** Ta được bảng kết quả như sau:

	A	B	C	D	E	F
2						
3	Cách 1: ghpt bằng Solver					
4						
5	ax	by	cz	biến	vế trái	vế phải
6	2	4	3	1	4	4
7	3	1	-2	-1	-2	-2
8	4	11	7	2	7	7

Vậy nghiệm tìm được của hệ phương trình là: x = 1, y= -1, z = 2.

Không chỉ sử dụng Solver để giải hệ phương trình phần mềm Excel còn cung cấp thêm một công cụ nữa để giải hệ phương trình bằng phương pháp ma trận là sử dụng hàm **MINVERSE** và **MMULT**

2.5.2 Giải hệ phương trình bằng hàm MINVERSE và hàm MMULT

Khi hệ phương trình (*) có m = n thì nó trở thành hệ vuông gồm n phương trình n ẩn. Khi đó ma trận hệ số A , ma trận biến X sẽ là một ma trận vuông cấp n và ma trận của vế phải hệ phương trình B là:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1\ b_2 \dots b_n \end{pmatrix}$$

Vậy hệ (*) được viết lại là: $A * X = B$ (**) nên $X = A^{-1} * B$ (***)

2.5.1.1 Giới thiệu hàm MINVERSE và hàm MMULT

❖ **Hàm MINVERSE**

Là hàm dùng để tìm ma trận nghịch đảo.

Cú pháp: **MINVERSE(array)**

array: là địa chỉ ma trận cần nghịch đảo.

Ví dụ 2.5

	H	I	J	K	L	M	N
7		Tìm ma trận nghịch đảo					
8							
9		1	3		-2	1.5	
10		2	4		1	-0.5	
11							
12		Chọn vùng địa chỉ **L9:M10** rồi nhập **=MINVERSE(L9:M10)**					
13		Nhấn tổ hợp phím ***Ctrl + Shift + Enter***					

❖ **Hàm MMULT**

Là hàm dùng để nhân 2 ma trận.

Cú pháp: **MMULT(array1, array2)**

array1, array2: là địa chỉ của các ma trận cần nhân.

Ví dụ 2.6

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
3												
4		Nhân 2 ma trận										
5						2	5	5				
6		2	3	7		5	4	2		33	71	23
7		4	2	6		2	7	1		30	70	30
8												
9		Chọn vùng địa chỉ **K6:M7** rồi nhập vào công thức ***=MMULT(C6:E7,G5:I7)***										
10		Nhấn tổ hợp phím ***Ctrl + Shift + Enter***										

Chú ý: - Nhấn tổ hợp phím **Ctrl + Shift + Enter** sau khi nhập xong công thức.

- Chỉ khi là ma trận vuông nếu không khi sử dụng hàm này sẽ báo lỗi #VALUE!.

- Nếu có phần tử nào trong ma trận là rỗng hoặc là chữ thì báo lối #VALUE!.

2.5.2.2 Giải hệ phương trình

Quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp ma trận sử dụng hai hàm **MINVERSE** và **MMULT** được tiến hành theo 3 bước sau:

Bước 1: Chuẩn bị bài toán: Nhập ma trận hệ số A, nhãn của ma trận biến X và ma trận số vế phải B của hệ phương trình.

Bước 2: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A: sử dụng hàm *MINVERSE.*

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ phương trình: sử dụng hàm *MMULT.*

Để cụ thể hơn ta xét ***ví dụ 2.4*** ở trên.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Ta tiến hành giải như sau:

Bước 1: Chuẩn bị bài toán: Ta tiến hành nhập ma trận hệ sốA, nhãn của ma trận biến X và ma trận số vế phải B của hệ phương trình như hình sau:

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2									
3		Cách 2: ghpt bằng ma trận							
4									
5		Chuẩn bị bài toán trên Excel			A*X=B	⇒	X=A^(-1)*B		
6									
7			A			X		B	
8		2	4	3		x		4	
9		3	1	-2	*	y		-2	
10		4	11	7		z		7	
11									

Bước 2: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A

12		Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A							
13									
14		1	0.172414	-0.37931		Chọn vùng địa chỉ J8:L10 rồi nhập vào công thức			
15		-1	0.068966	0.448276		J14 = MINVERSE(J8:L10)			
16		1	-0.2069	-0.34483		ctrl+shift+enter			
17									

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ phương trình

18		Tìm nghiệm của hệ phương trình							
19									
20		x	1			Chọn vùng địa chỉ K20:K22 rồi nhập vào công thức			
21		y	-1			K20 = MMULT(J14:L16,P8:P10)			
22		z	2			ctrl+shift+enter			

Vậy nghiệm của hệ phương trình là x =1, y =-1, z = 2.

Nhận xét: Dù lựa chọn phương pháp giải nào cũng đều cho ta cùng một kết quả.