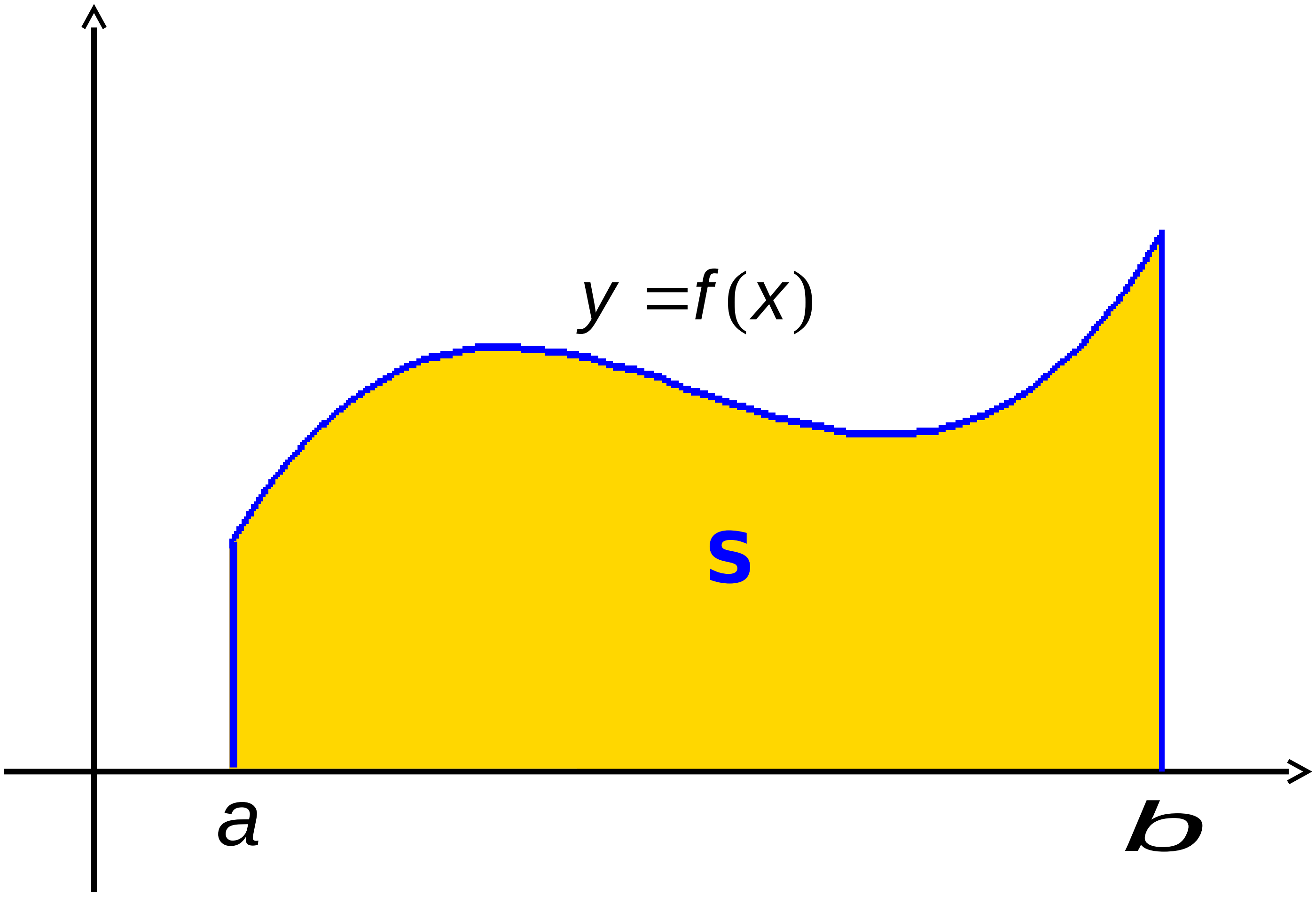
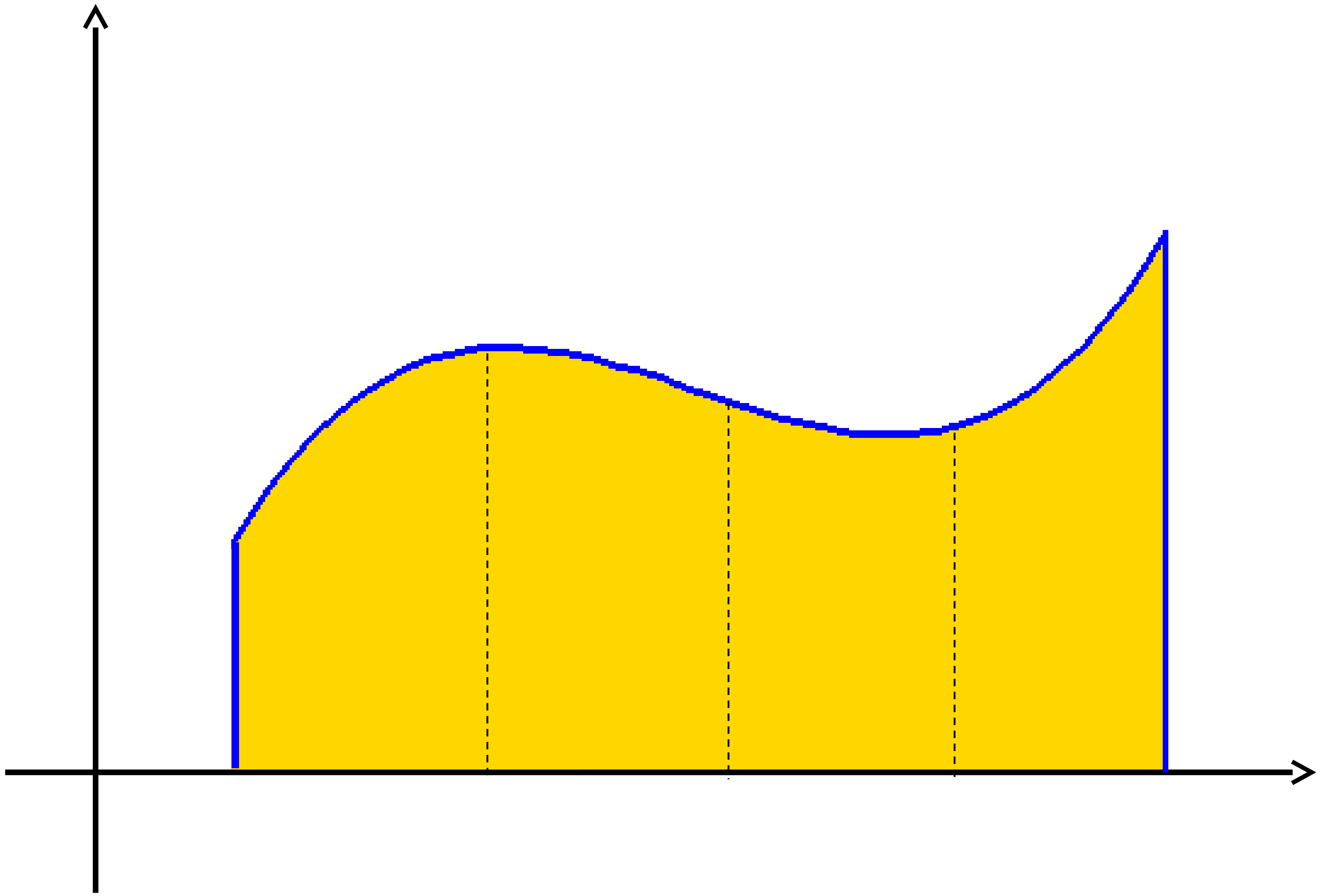
TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

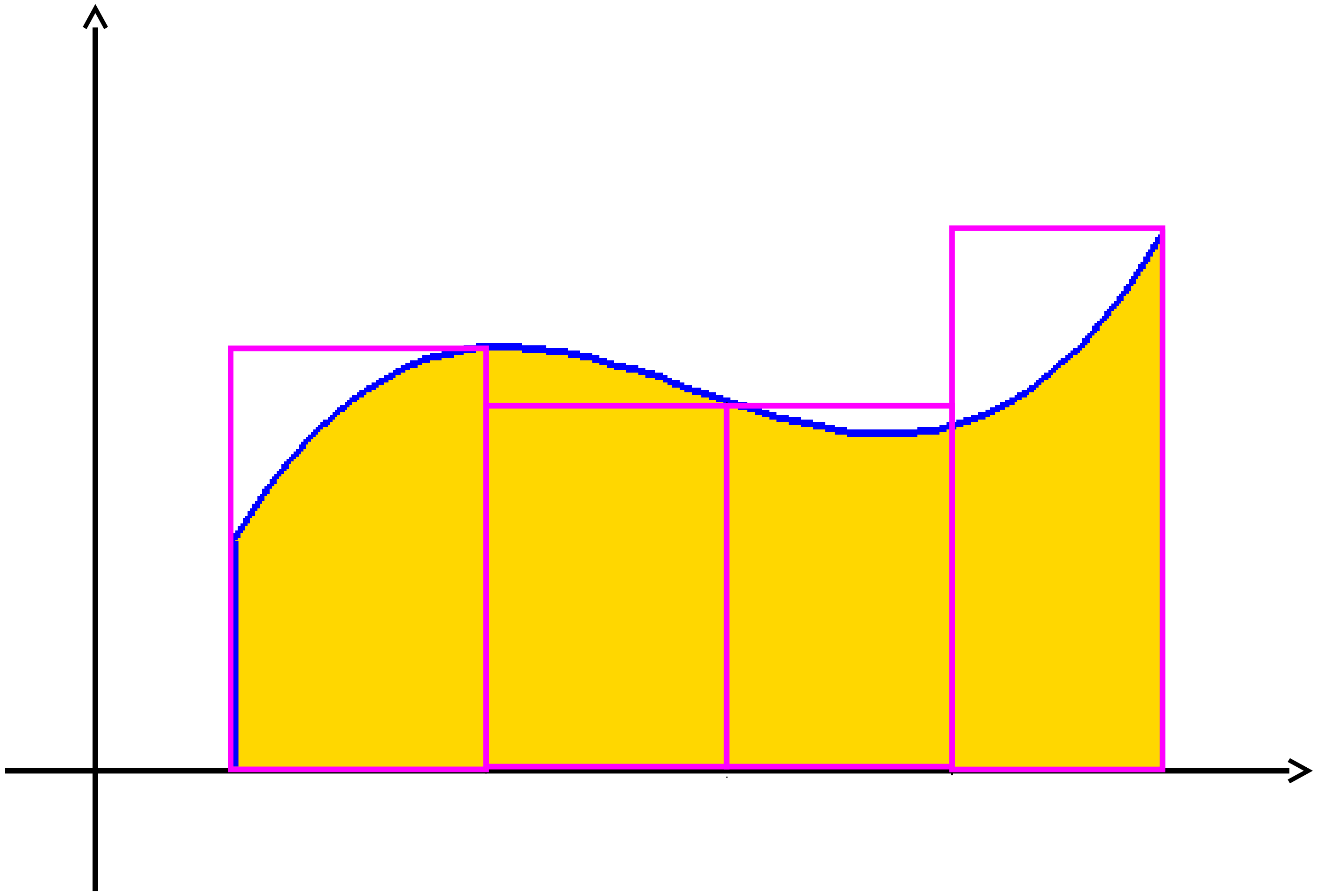
Bài toán diện tích



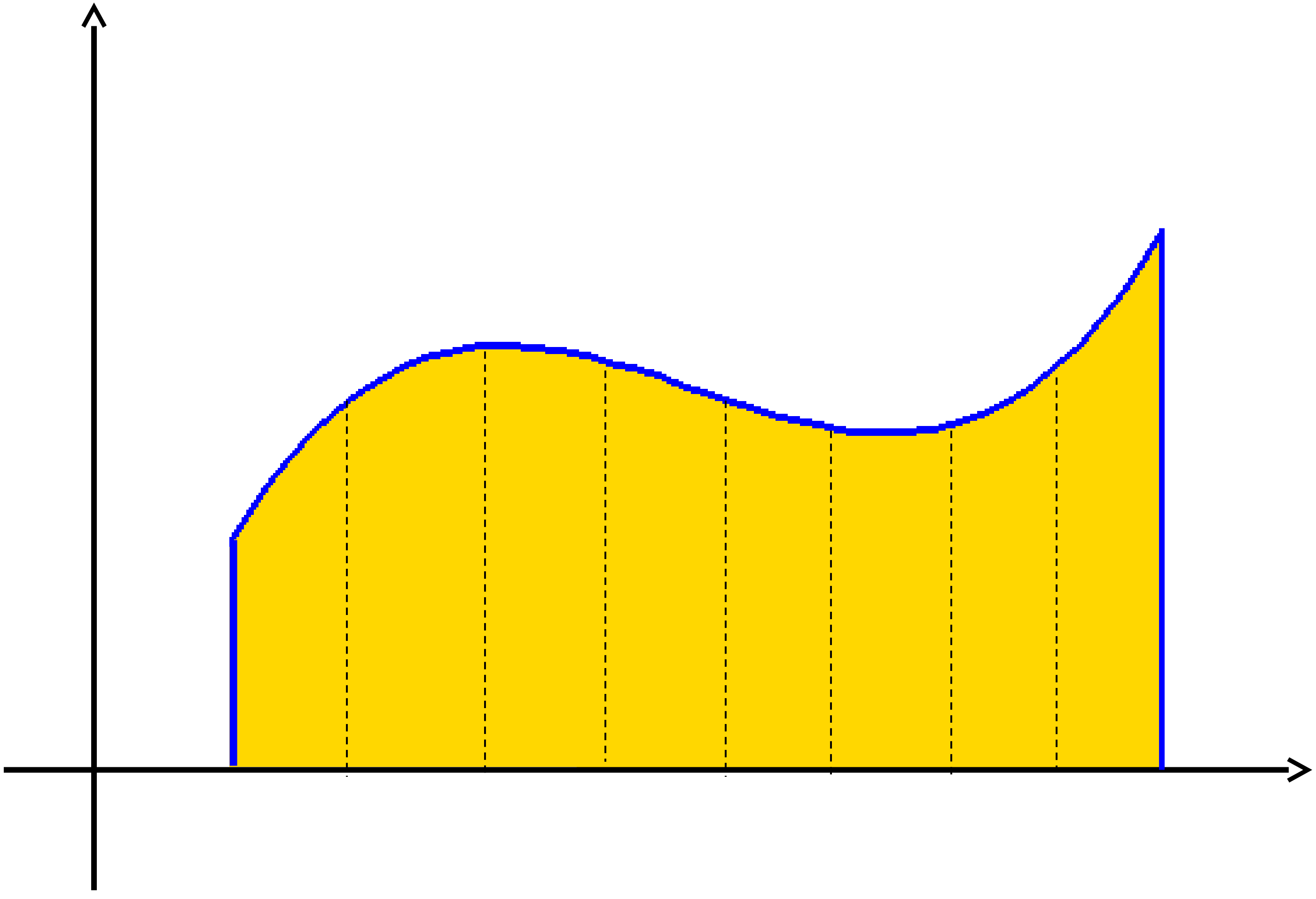
Chia S thành nhiều diện tích con



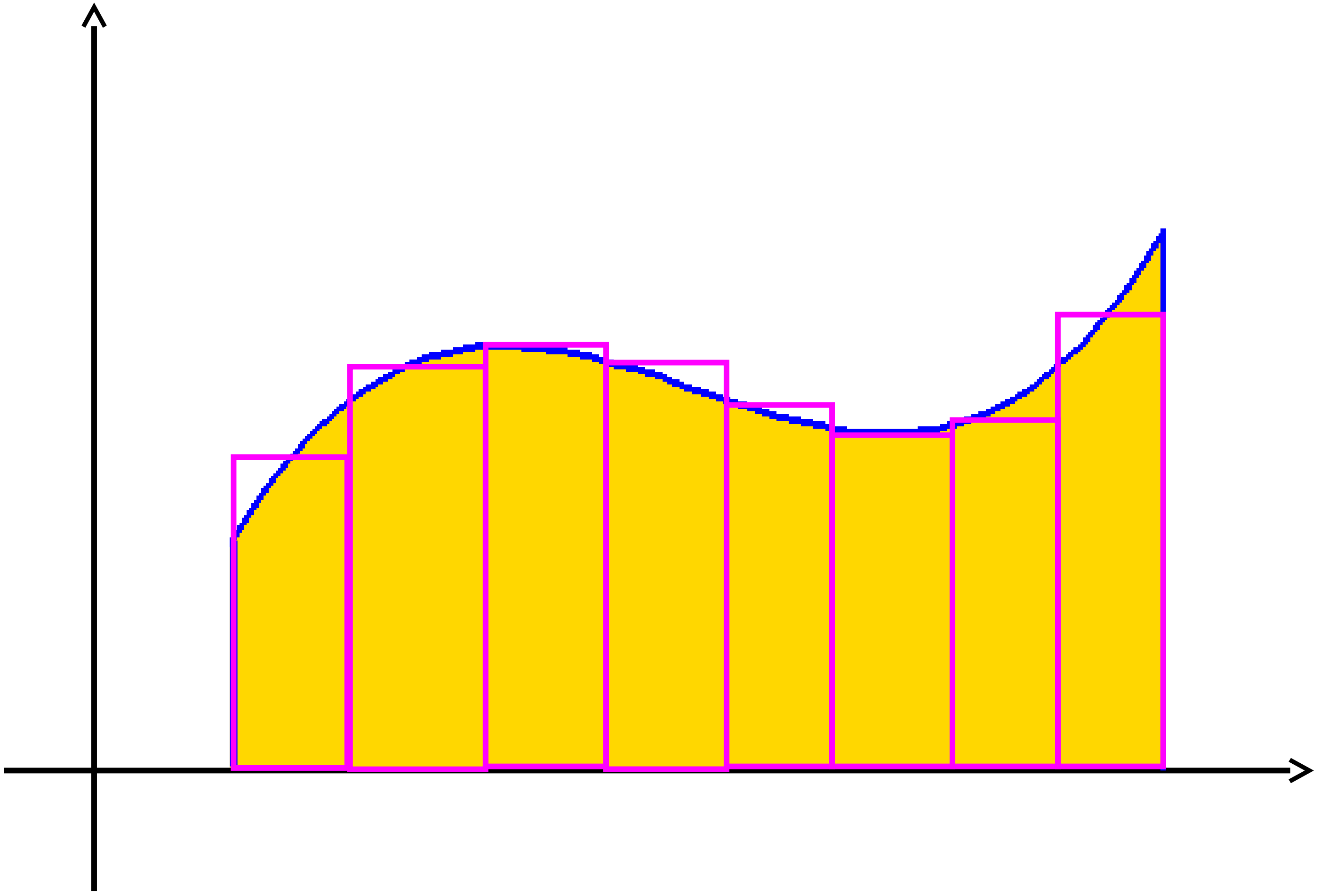
Xấp xỉ các diện tích con bằng diện tích các hình chữ nhật con



Chia S càng nhỏ



Tổng diện tích xấp xỉ càng gần S



ĐỊNH NGHĨA

Phân hoạch P của [a, b] là tập hợp các điểm chia của [a, b] thỏa mãn $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$

$d = \max\{(x_{i+1} - x_i) / i = 0,..,n-1\}$: đường kính phân hoạch

Xét hàm số f(x) xác định trên [a, b], P là 1 phân hoạch của [a, b].

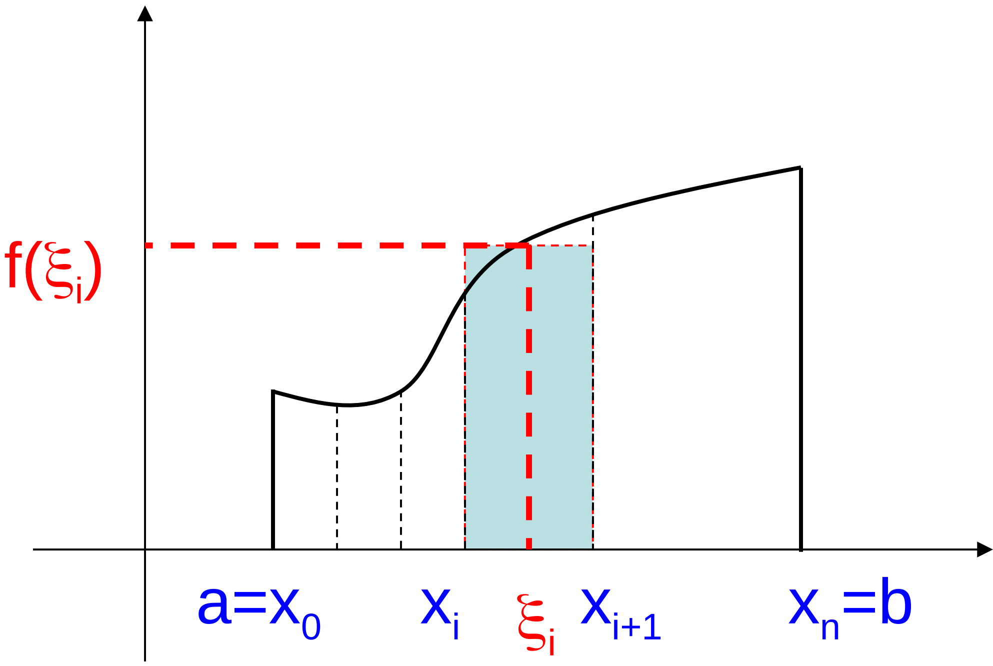
Trên $[x_i, x_{i+1}]$ chọn ξ_i tùy ý, đặt

$$S(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Tổng tích phân ứng với phân hoạch P

$$S(P,f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

f khả tích ⇔ tồn tại giới hạn hữu hạn của S(P, f) khi d→ 0 (không phụ thuộc P)

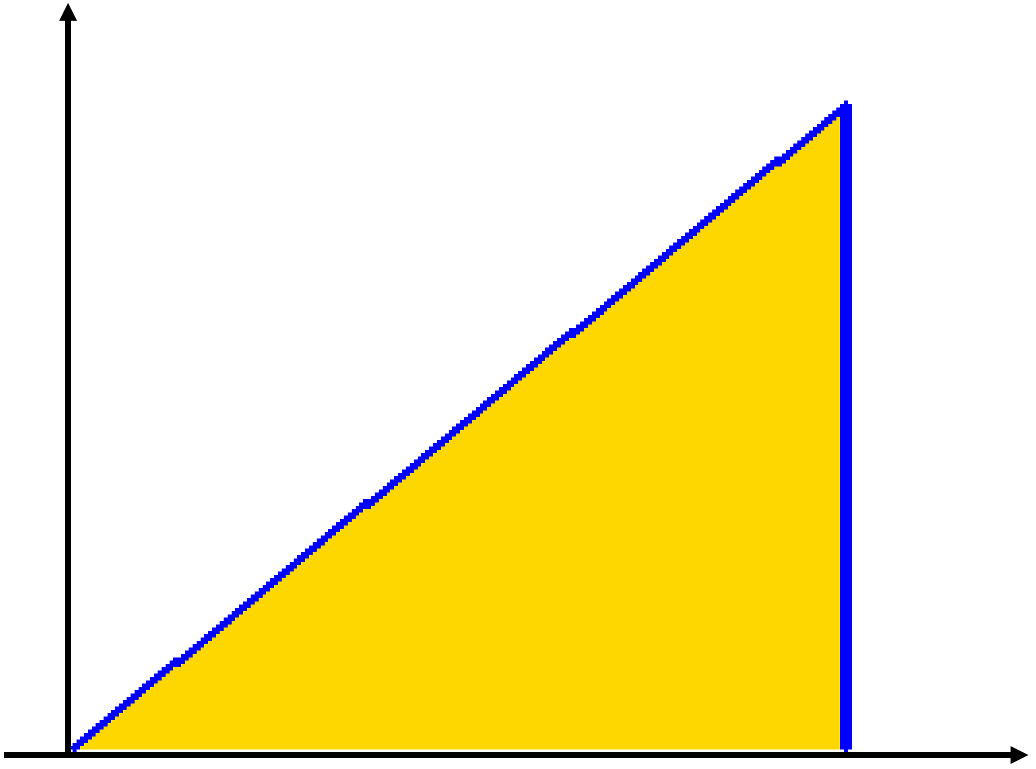


$$\lim_{d\to 0} S(P,f)=\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ về tổng tích phân

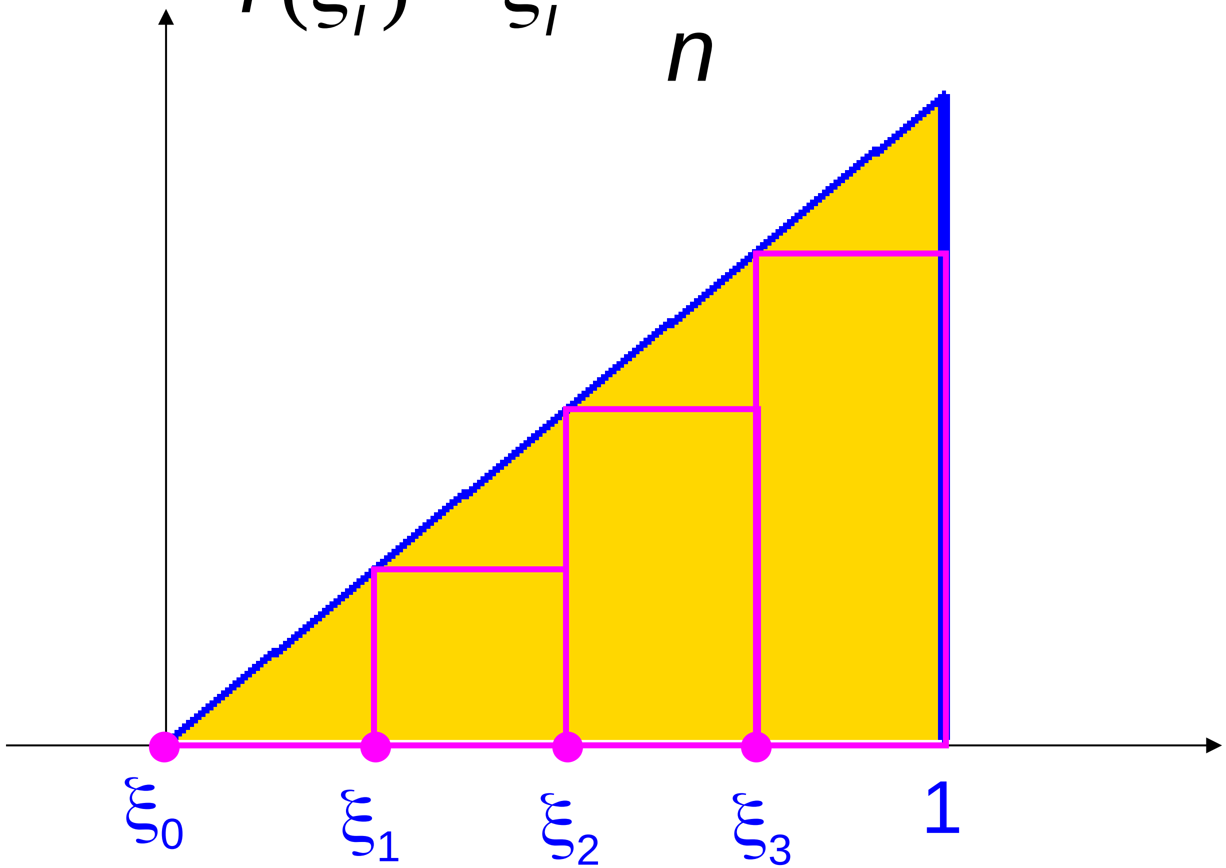
Cho $f(x) = x$ trên $[0,1]$, phân hoạch đều $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$.

Tìm tổng tích phân nếu: $\xi_i = x_i$



$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n} \Rightarrow d = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = x_i = 0 + i\frac{1}{n} = \frac{i}{n},$$

$$f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i}{n}$$



$$S(P,f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i=\frac{1}{n^2}[0+1+\ldots+(n-1)]$$

$$=\frac{(n-1)n}{2n^2}\quad\xrightarrow[d\to 0]{}\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

Điều kiện để f khả tích trên [a, b]

Hàm f liên tục trên [a, b] ngoại trừ 1 số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 thì khả tích trên [a,b].

(Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân xác định.)

Ví dụ: $\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x} dx$ là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 x \ln x dx$ là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 \ln x dx$ không là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 2.

Tính chất hàm khả tích

1. f khả tích trên [a, b] thì f bị chặn trên [a,b]
2. f khả tích trên [a,b] thì | f | khả tích trên [a,b]
3. f khả tích trên [a,b], m và M lần lượt là gtnn và gtln của f trên [a,b], khi đó

$$\ast \; m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$* \; f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

Tính chất hàm khả tích

4. $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

6. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

7. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tính chất hàm khả tích

8. $\int_a^b dx = b - a$

10. f(x) tuần hoàn với chu kỳ T: $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$

11. f lẻ trên [-a, a]: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

f chẵn trên [-a, a] $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Định lý giá trị trung bình

f liên tục trên [a,b], khi đó tồn tại c $\in$[a,b] sao cho

$$f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

Áp dụng: tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dx$

hàm e^{t^2} liên tục trên [0, x], theo định lý, tồn tại

c$\in$ [0,x] sao cho

$$\int_0^x e^{t^2}dx=(x-0)e^{c^2}>x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân

* Nếu f khả tích trên [a,b] thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ liên tục trên [a,b]

* Nếu f liên tục trên [a,b] thì F khả vi trên [a,b] và

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$$ *Đạo hàm theo cận trên*

<u>Hệ quả</u>: $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$ f liên tục, φ và ψ khả vi

$$\boxed{F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)}$$

Ví dụ

1/ Tính đạo hàm của $$f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \ln(1+t^2)dt$$

$$f'(x) = 2x.\ln(1+(x^2+1)) - 2x.\ln(1+x^4)$$

2/ Tìm cực trị của f(x) trong (0, 1)

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2+t+1}dt$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}$$ đổi dấu khi đi qua x = 1/2 $\in$(0, 1)

3/ Tính giới hạn $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$

Theo vd phần định lý giá trị trung bình

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dx=+\infty$$

Vậy gh trên có dạng VĐ 0/0, áp dụng qtắc L'H

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}\right)'}{\left(xe^{x^2}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt + x e^{x^2} \right)'}{\left(x e^{x^2} \right)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = 1$$

Công thức Newton-Leibnitz

f liên tục trên [a, b],F là nguyên hàm của f trên [a, b]

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Phương pháp đổi biến số

- Nếu f liên tục trên [a, b]
- x = u(t) thỏa u(t) và u'(t) liên tục trên [α, β]
- u(α) = a, u(β) = b

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt}$$

PP tích phân từng phần

Nếu u(x), v(x) cùng các đạo hàm liên tục trên [a, b]

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

Ví dụ

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Big|_3^4$$

$$= \ln 9 - \ln(3+3\sqrt{2}) = \ln\frac{3}{1+\sqrt{2}}$$

Ví dụ

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x} = t$$

$$I = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

Một tích phân cần nhớ

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx}$$

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$$

$$I_n = -\cos x . \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x . \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx$$

$$= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\boxed{\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{cases}}$$