

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

(phần 2)

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

Điểm kỳ dị:

Cho $f(x)$ xác định trên $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty$$

ta nói x_0 là điểm kỳ dị của f trên $[a, b]$

Tích phân suy rộng loại 2 là $\int_a^b f(x) dx$

với f có ít nhất 1 điểm kỳ dị trên $[a, b]$

Định nghĩa.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b - \varepsilon]$, với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, kỳ dị tại b

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Nếu f kỳ dị tại a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Nếu giới hạn hữu hạn: $\int_a^b f(x) dx$ hội tụ

Ngược lại: phân kỳ.

Nếu f kỳ dị tại a và b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nếu f kỳ dị tại $x_0 \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

(vế trái hội tụ \Leftrightarrow các tp vế phải đều hội tụ)

Công thức Newton-Leibnitz

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b - \varepsilon]$, với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, kỳ dị tại b , $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Với

$$F(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$$

Lưu ý: các pp đổi biến số và tp từng phần vẫn dùng như tp xác định.

Ví dụ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{kỳ dị tại } x = 0$$

$$= \int_0^1 \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_0^1 = -\infty$$

Vậy tp trên phân kỳ.

Ví dụ

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

f kỳ dị tại $x = 0$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx$$

$$= 0 - 4\sqrt{x} \Big|_0^1 = -4$$

Ví dụ

$$I = \int_{-1/2}^{-1/4} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$$

f kỳ dị tại $x = -1/2$.

$$t^2 = 2x + 1 \Rightarrow 2t dt = 2dx$$

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t dt}{\frac{t^2 - 1}{2} t} = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho $f(x)$, $g(x)$ không âm và khả tích trên $[a, b - \varepsilon]$,
 $\forall \varepsilon > 0$, kỳ dị tại b

Nếu $f(x) \leq kg(x)$, $\forall x, a \leq x < b$

$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b g(x)dx \text{ hội tụ thì } \int_a^b f(x)dx \text{ hội tụ} \\ \int_a^b f(x)dx \text{ phân kỳ thì } \int_a^b g(x)dx \text{ phân kỳ} \end{array} \right.$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho $f(x)$, $g(x)$ như tiêu chuẩn so sánh 1

Đặt $k = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ (giới hạn tại điểm kỳ dị)

- $0 \neq k \neq \infty$ $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ Cùng hội tụ hoặc phân kỳ
- $k = 0$ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ
- $k = \infty$ $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân cơ bản

$$I_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$

kỳ dị tại b

kỳ dị tại a

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\ln \varepsilon + \ln(b-a) \\ -\frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right] \end{cases}$$

Sự hội tụ tuyệt đối (hàm có dấu tùy ý)

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon \geq 0$, nếu $\int_a^b |f|$
hội tụ thì $\int_a^b f$ hội tụ. Khi đó ta nói $\int_a^b f$
hội tụ tuyệt đối.

- Sự hội tụ tuyệt đối là sự hội tụ của tích phân $|f|$
- Hội tụ tuyệt đối \Rightarrow hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$

f kỳ dị tại $x = 0$

$$0 \leq f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x - 0)^{1/2}}$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{(x - 0)^{1/2}}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sin x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$$

$\Rightarrow I$ cùng bản chất với $\int_b^1 g(x)dx = \int_b^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$
nên hội tụ.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_b^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin X \cos X}}$

$f(x) \geq 0$, kỳ dị tại $\pi/2$ và 0, tách I thành 2 tp

$$I = \underbrace{\int_b^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\sin X \cos X}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin X \cos X}}}_{I_2}$$

Xét I_1 : f kỳ dị tại $x = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x \cos x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

$\Rightarrow I_1$ cùng bản chất với $\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(x) dx$ nên hội tụ.

Xét I_2 : f kỳ dị tại $x = \pi/2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}},$$

$$\sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \text{ khi } x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^1}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sqrt{\sin x \cos x}} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-}{\rightarrow} 1$$

$\Rightarrow I_2$ cùng bản chất với $\int_{\pi/3}^{\pi/2} g(x) dx$ nên phân kỳ

I_1 hội tụ, I_2 phân kỳ $\Rightarrow I$ phân kỳ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Tổng quát I không phải là tích phân suy rộng loại 1.

$$I = \int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = I_1 + I_2$$

$$I_1 \text{ hội tụ} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

$$I_2 \text{ hội tụ} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

$\Rightarrow I$ phân kỳ với mọi α

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(x^{3/2} + 1)\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$$

f kỳ dị tại $x = 0$, tách I thành 2 tích phân:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{(x^{3/2} + 1)\sqrt{x}}{e^x - 1} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{(x^{3/2} + 1)\sqrt{x}}{e^x - 1} dx}_{I_2}$$

(do $x = 0$ quyết định)

(do $x = +\infty$ quyết định)

$$\star f(x) = \frac{(x^{3/2} + 1)\sqrt{x}}{e^x - 1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

I_1 cùng bản chất với $\int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ nên hội tụ

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{3/2} + 1)x^2\sqrt{x}}{e^x - 1} = 0 (=k)$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên I_2 hội tụ Vậy I hội tụ.

