Môn học

# CƠ HỌC ỨNG DỤNG

# Chương III

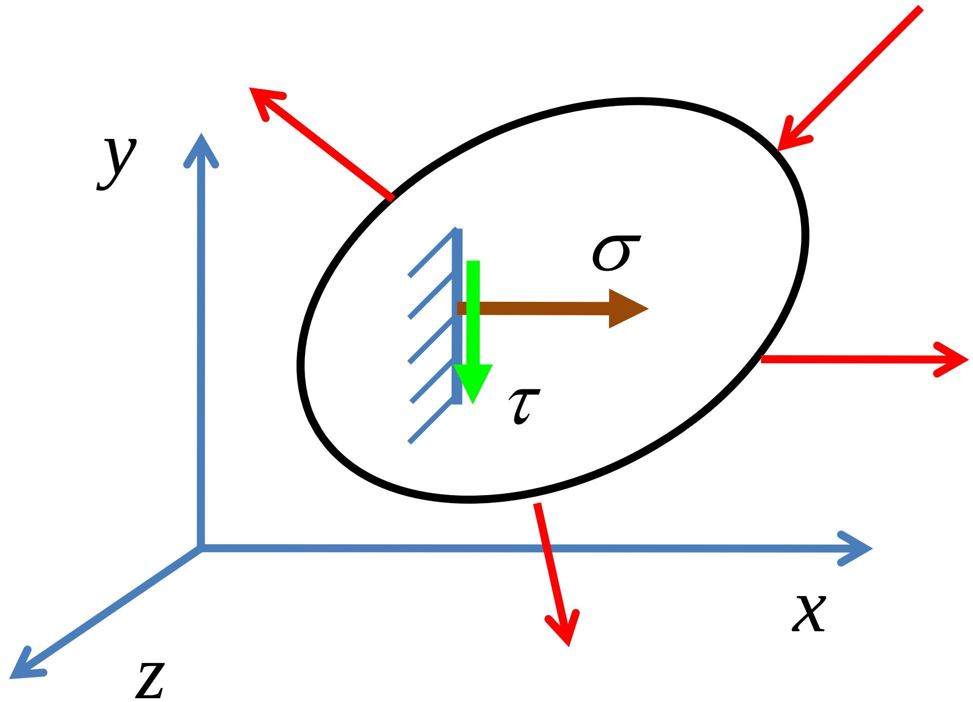
# Ứng suất và Biến dạng

GV: ThS. Nguyễn Thanh Nhã
Bộ môn Cơ Kỹ Thuật – Khoa Khoa Học Ứng Dụng – 106B4
ĐT: 08.38660568 – 0908568181
Email: thanhnhanguyendem@gmail.com

# 1. Trạng thái ứng suất tại một điểm

## Định nghĩa

***Trạng thái ứng suất tại một điểm là tập hợp tất cả những ứng suất trên các mặt đi qua điểm ấy.***

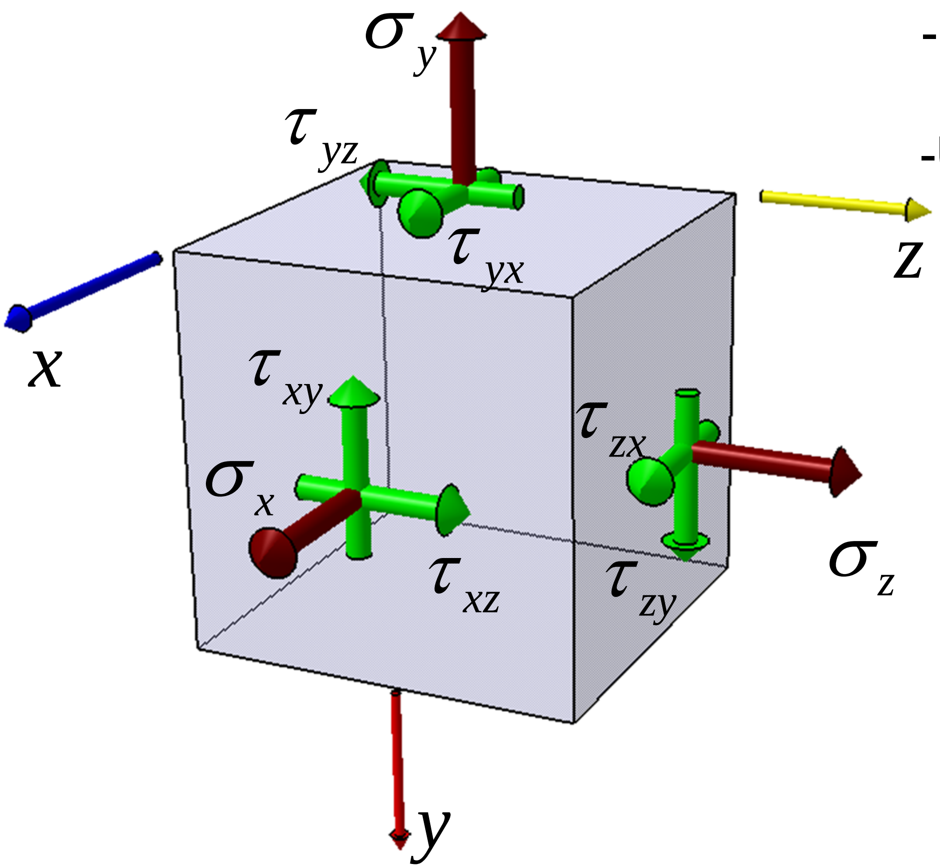



**Nghiên cứu trạng thái ứng suất là tìm đặc điểm và liên hệ giữa $\sigma$ và $\tau$, tìm ứng suất lớn nhất, nhỏ nhất để kiểm tra bền hoặc giải thích, biết được dạng phá hỏng của vật thể.**

# 1. Trạng thái ứng suất tại một điểm

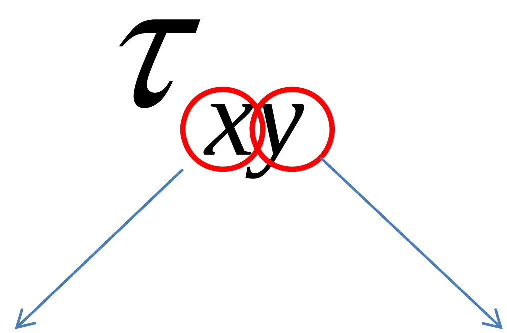
## Phương pháp nghiên cứu

**Tách phân tố hình hộp bao quanh điểm ta cần khảo sát trạng thái ứng suất. Hệ trục tọa độ như hình vẽ.**




-**Ứng suất pháp:** $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

-**Ứng suất tiếp:** $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$




**mp vuông góc với trục x**

**phương // trục y**

# 1. Trạng thái ứng suất tại một điểm

## Phân loại trạng thái ứng suất

### *Lý thuyết đàn hồi*

→ Tại một điểm ta luôn luôn tìm được một phân tố mà trên các mặt *chỉ có ứng suất pháp*. Mặt đó gọi là *mặt chính*, phương ứng suất pháp gọi là *phương chính*, ứng suất pháp đó gọi là *ứng suất chính*.

Kí hiệu ứng suất chính: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Qui ước: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Trạng thái *ứng suất khối*: 3 ứng suất chính khác không

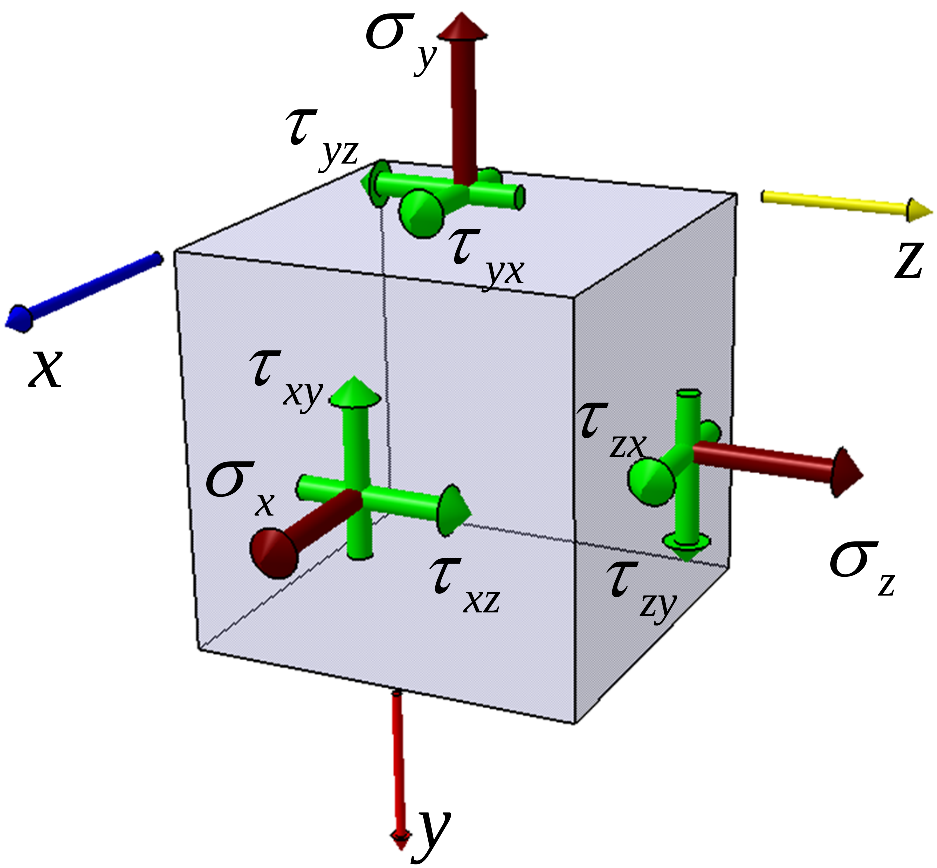
Trạng thái *ứng suất phẳng*: 2 ứng suất chính khác không

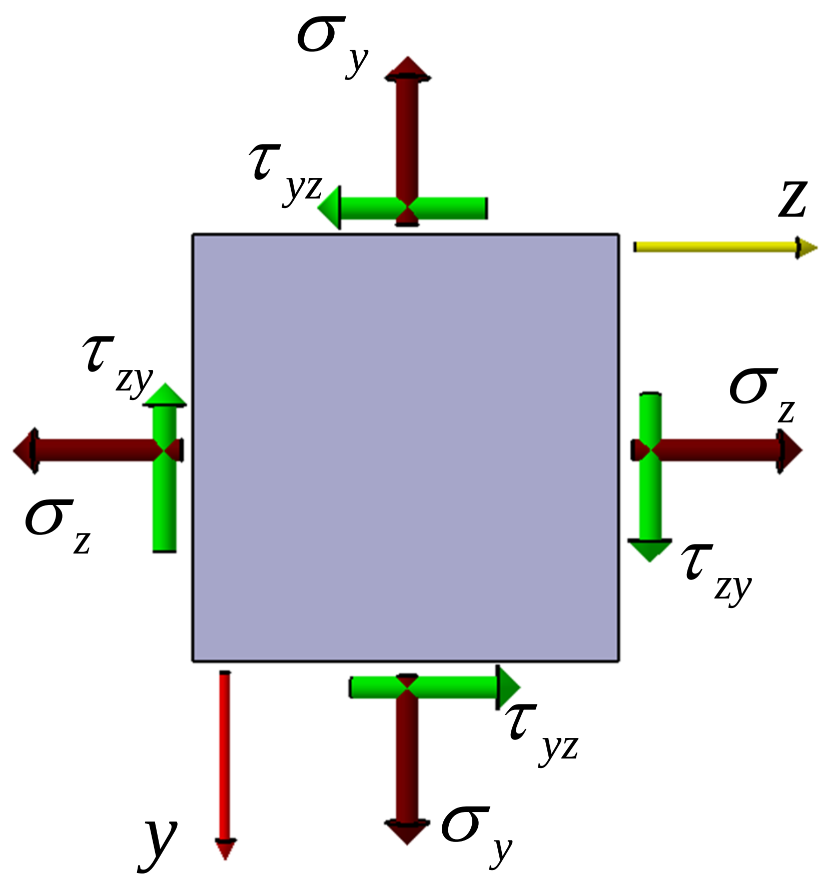
Trạng thái *ứng suất đơn*: 1 ứng suất chính khác không

Nghiên cứu trạng thái ứng suất:
→ *Tìm phương chính, ứng suất chính, ứng suất tiếp cực đại*

## 2. Trạng thái ứng suất phẳng

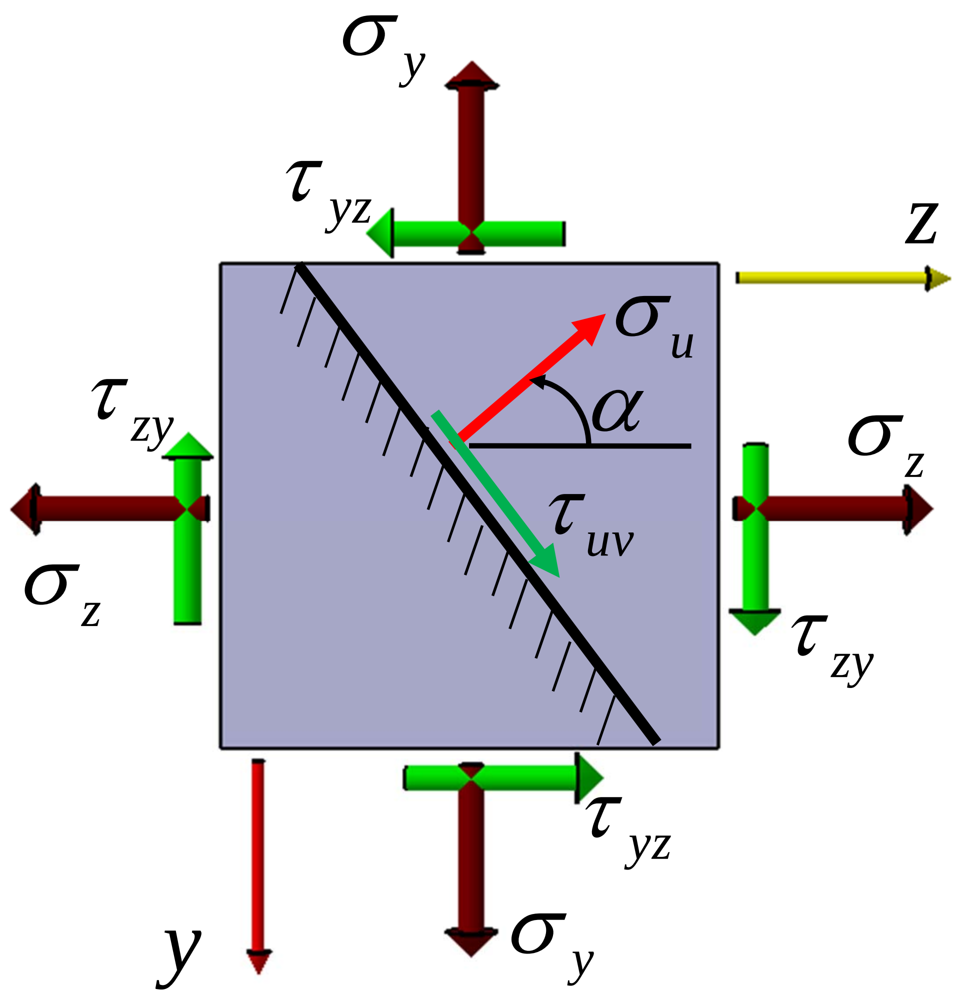
***Xét 1 phân tố có ứng suất trên mặt có pháp tuyến song song trục x bằng không.*** $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ ***. Chiếu lên mặt Oyz***



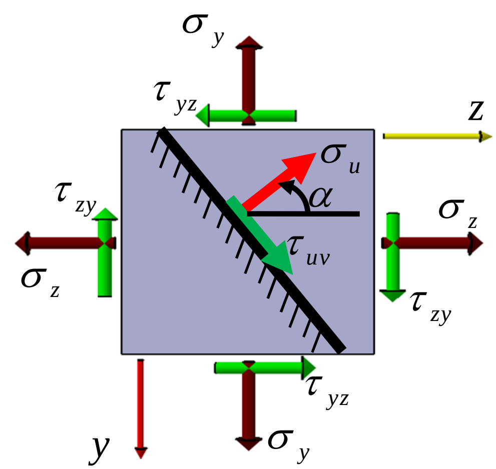
## 2. Trạng thái ứng suất phẳng

### Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ



## 2. Trạng thái ứng suất phẳng

### Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ




$$\sigma_u = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy}\cos 2\alpha$$

Tại mặt vuông góc với mặt có pháp tuyến u ($\alpha + 90^0$)

$$\sigma_v = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{zy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{vu} = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{zy}\cos 2\alpha$$

**Nhận xét:**

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma_u + \sigma_v = \sigma_z + \sigma_y = const \\ \left|\tau_{uv}\right| = \left|\tau_{vu}\right|\end{gathered}}$$

Bất biến của US pháp

Đluật đối ứng US tiếp

# 2. Trạng thái ứng suất phẳng

## Ứng suất chính – Phương chính

***Mặt chính là mặt có ứng suất tiếp bằng không. Để tìm mặt chính:*** $\tau_{uv} = 0$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_0 + \tau_{zy}\cos 2\alpha_0 = 0 \quad \boxed{\Rightarrow tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}} \quad (*)$$

***→ Hai trị số*** $\alpha_0$ ***khác biệt nhau 90⁰ → Hai phương chính***

***Thay vào*** $\sigma_u$***, thu được các ứng suất chính***

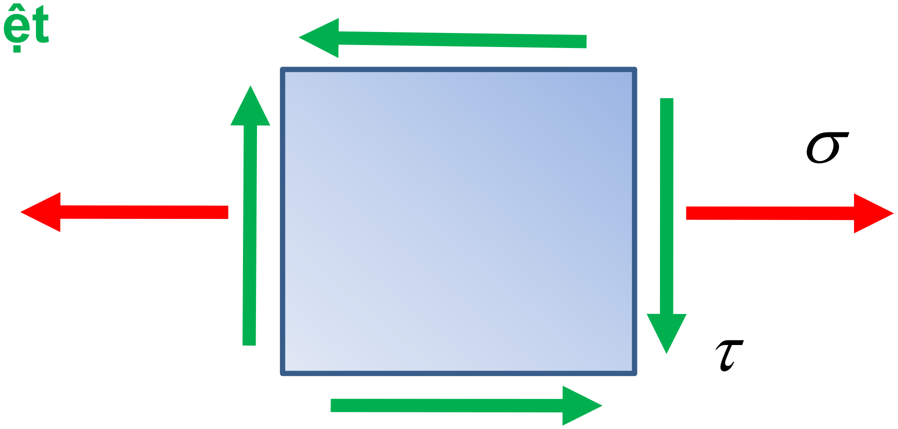
$$\boxed{\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}} \quad (**)$$

# 2. Trạng thái ứng suất phẳng

## Hai trường hợp đặc biệt

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \qquad (**)$$

### a. Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt




$$\sigma_z = \sigma;\ \ \sigma_y = 0;\ \ \tau_{zy} = \tau$$

Thay vào (**) ta được:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

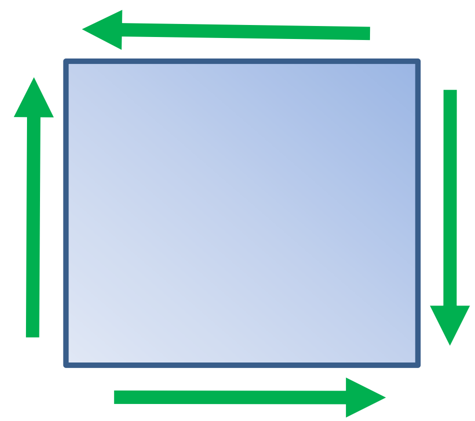
## 2. Trạng thái ứng suất phẳng

### Hai trường hợp đặc biệt

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \qquad (**)$$

### b. Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

$$\sigma_z = \sigma_y = 0; \;\; \tau_{zy} = \tau$$




Thay vào (**) ta được:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \pm\tau \;\; hay \;\; \sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$$

$$tg2\alpha_0 = \infty \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

# 2. Trạng thái ứng suất phẳng

## Ứng suất tiếp cực trị

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 0 \qquad \left( \tau_{uv} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} 2\cos 2\alpha - 2\tau_{zy} \sin 2\alpha \Rightarrow tg 2\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_{zy}}$$

**So sánh với (*), thu được:** $tg 2\alpha = -\dfrac{1}{tg 2\alpha_0}$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{4}$$

**→ Mặt có ưs tiếp cực trị tạo với mặt chính một góc 45$^0$**

**Thay vào $\tau_{uv}$ thu được:**

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$$

# 3. TTƯS trong bài toán phẳng – P.P đồ thị

## Cơ sở của phương pháp

$$\begin{cases} \sigma_u = \dfrac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zy}\sin 2\alpha \\ \tau_{uv} = \dfrac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

**Chuyển $\dfrac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$ qua vếtrái, bình phương 2 vế, cộng 2 vế cho $\tau_{uv}^2$**

**Ta thu được phương trình vòng tròn Mohr ứng suất**

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{uv}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{zy}\right)^2$$

**Trục hoành:** $\sigma$

**Trục tung:** $\tau$

**Tâm:** $\left(\left(\sigma_z + \sigma_y\right)/2; 0\right)$

**Bán kính:** $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$

**Tọa độ các điểm trên vòng tròn *Mohr* ứng suất cho ta giá trị các ưs pháp và ưs tiếp nằm trên những mặt khác nhau đi qua điểm có trạng thái ưs ta đang xét.**

# 3. TTƯS trong bài toán phẳng – P.P đồ thị

## Cách vẽ vòng tròn *Mohr*

**Cho một phân tố ứng suất.**
**Biết:** $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{zy}$
**Tìm:** $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \tau_{\max}, \tau_{\min}$ **, các phương chính, ưs pháp, ưs tiếp tại mặt nghiêng bất kì**

-Dựng hệ trục tọa độ: $\sigma O \tau$

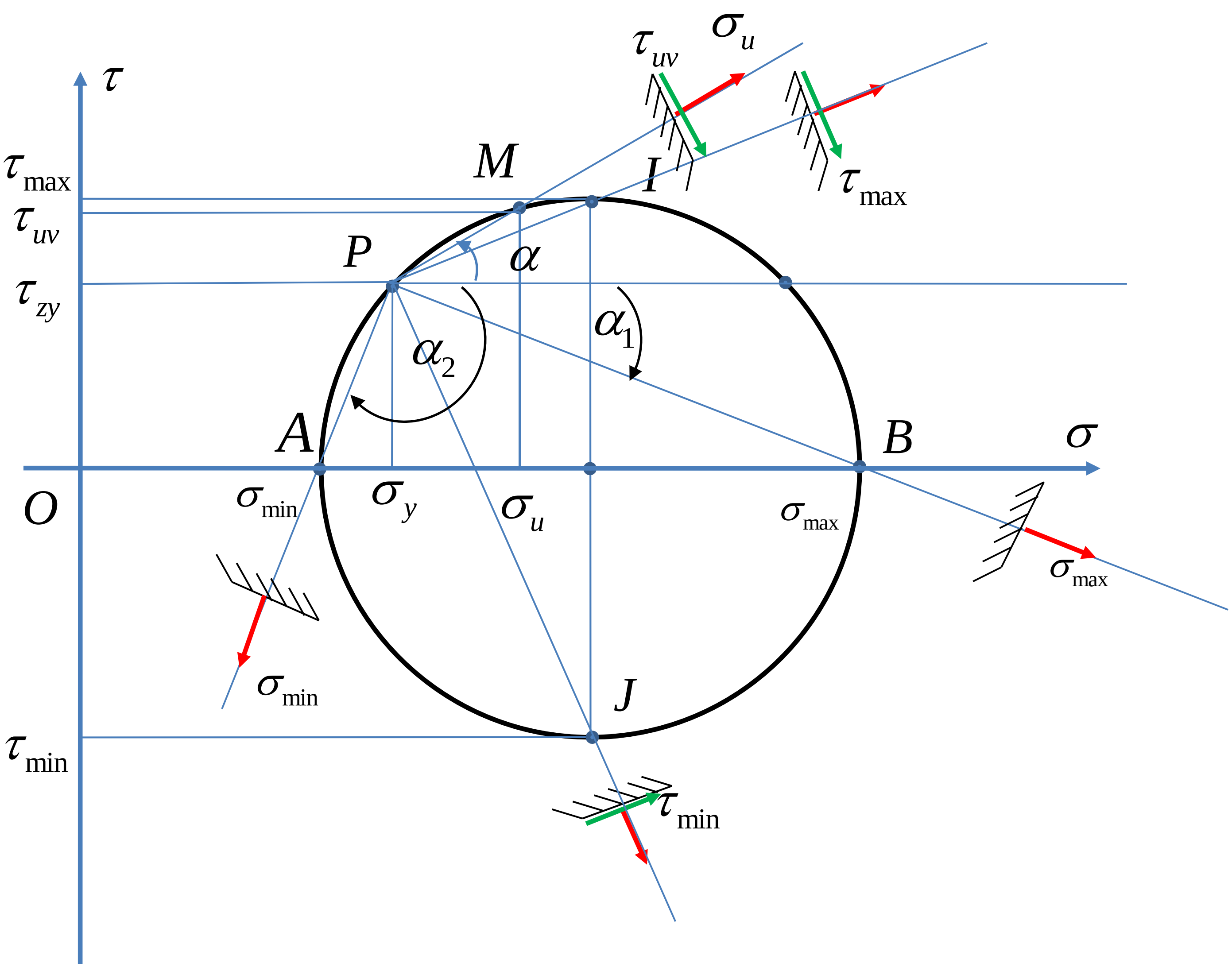
-Xác định tâm C vòng tròn: $C\left(\dfrac{\sigma_z + \sigma_y}{2}; 0\right)$

-Xác định bán kính R của vòng tròn: $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$

-Xác định điểm cực P: $P\left(\sigma_y; \tau_{zy}\right)$

# 3. TTƯS trong bài toán phẳng – P.P đồ thị

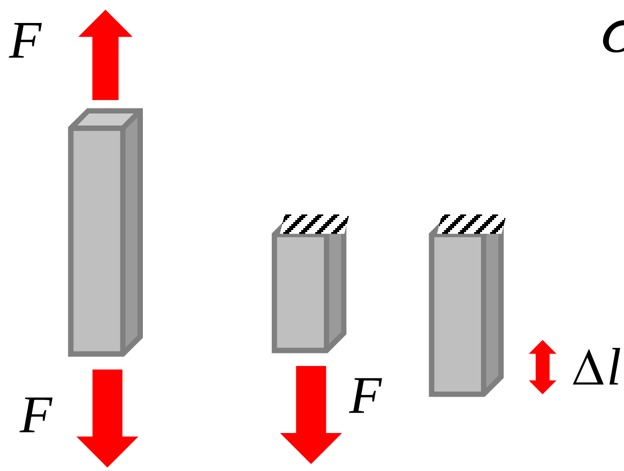
## Cách vẽ vòng tròn *Mohr*

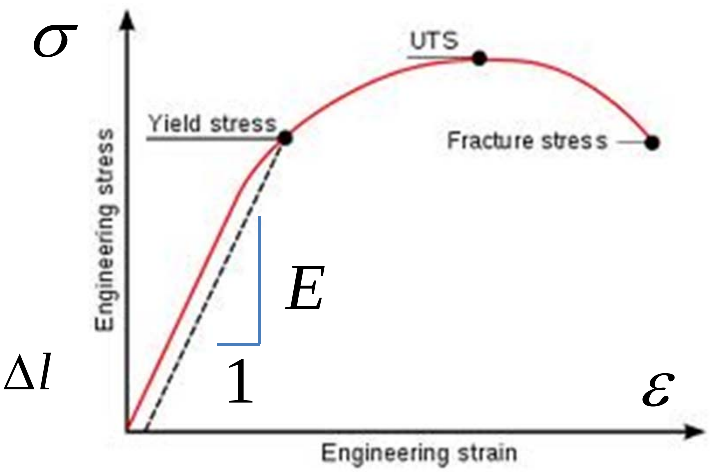


# 4. Liên hệ giữa ứng suất và Biến dạng

## Định luật Hooke tổng quát

**Quan hệ giữa ứng suất pháp và biến dạng dài**




$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

***Trong đó:* *E là module đàn hồi, là hằng số vật liệu***

**Theo phương vuông góc với phương góc với phương $\sigma$ ta cũng có**

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$$

***Trong đó:* *$\mu$ là hệ số poison, là hằng số vật liệu***

# 4. Liên hệ giữa ứng suất và Biến dạng

## Định luật Hooke tổng quát

**Ở trạng thái ứng suất khối với** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ **.Ta tìm biến dạng dài** $\varepsilon_1$ **theo phương ứng suất chính** $\sigma_1$

**Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng**

**Biến dạng theo phương 1 do** $\sigma_1$ **gây ra:** $\varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_1}{E}$

**Biến dạng theo phương 1 do** $\sigma_2$ **gây ra:** $\varepsilon_{12} = -\mu\dfrac{\sigma_2}{E}$

**Biến dạng theo phương 1 do** $\sigma_3$ **gây ra:** $\varepsilon_{13} = -\mu\dfrac{\sigma_3}{E}$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

**Tương tự:** $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$ $\qquad \varepsilon_3 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$

# 4. Liên hệ giữa ứng suất và Biến dạng

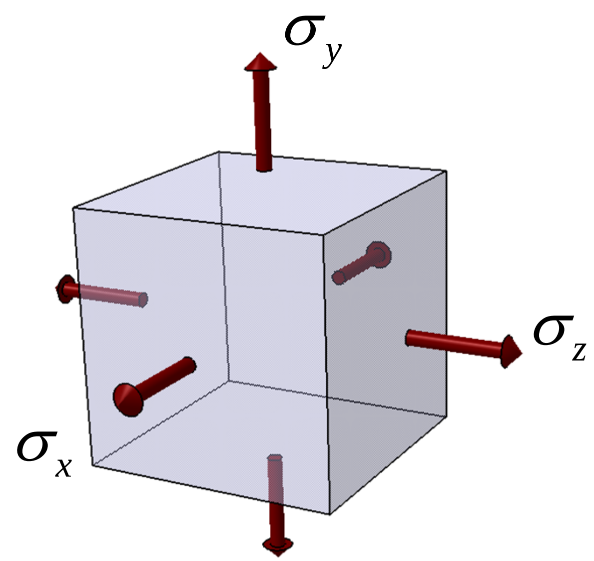
## Định luật Hooke tổng quát

**Đối với trạng thái ứng suất khối tổng quát:**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

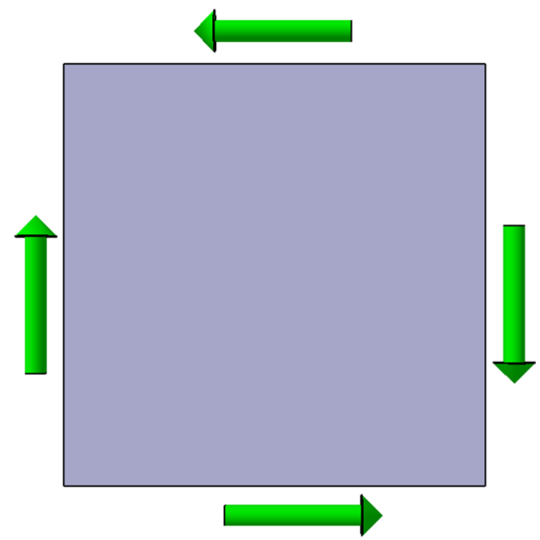
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$



# 4. Liên hệ giữa ứng suất và Biến dạng

## Định luật Hooke về trượt (cắt)

**Khi phân tố bị trượt thuần túy, chỉ có $\tau$ , biến dạng góc $\gamma$ quan hệ với $\tau$ theo định luật Hooke về trượt.**



$$\tau = G\gamma$$

***Trong đó:* *G là module đàn hồi trượt, là hằng số vật liệu***

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$