

2 : Khả vi và Vi phân

Vi phân cấp 2 là vi phân của vi phân cấp 1

$$\begin{aligned}d^2 f &= d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = d(f_x dx) + d(f_y dy) \\&= (d(f_x) dx + f_x d(dx)) + (d(f_y) dy + f_y d(dy)) \\&= f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2\end{aligned}$$

Hay ta viết dưới dạng

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Vậy ta viết dưới dạng quy ước sau

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

2 : Khả vi và Vi phân

Tổng quát công thức trên cho hàm 3 biến và cho vi phân cấp 3 của hàm 2 biến

Vi phân cấp 3 của hàm 2 biến $f(x,y)$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2$$

Vi phân cấp 2 của hàm 3 biến $f(x,y,z)$

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx$$

2 : Khả vi và Vi phân

Ví dụ : Cho hàm $f(x,y) = x \sin y - 2y \cos x$. Tính df , d^2f tại $(0, \pi/2)$

Giải :

Ta đi tính các đạo hàm riêng đến cấp 2, thay vào công thức tính vi phân

$$f'_x = \sin y + 2y \sin x, f'_y = x \cos y - 2 \cos x$$

$$f''_{xx} = 2y \cos x, f''_{xy} = \cos y + 2 \sin x, f''_{yy} = -x \sin y$$

Vậy ta được:

$$df(0, \pi/2) = f'_x(0, \pi/2) dx + f'_y(0, \pi/2) dy = dx - 2 dy$$

$$d^2f(0, \pi/2) = f''_{xx}(0, \pi/2) dx^2 + 2f''_{xy}(0, \pi/2) dx dy + f''_{yy}(0, \pi/2) dy^2$$

$$\text{Vậy : } df(0, \pi/2) = dx - 2 dy, \text{ và } d^2f(0, \pi/2) = \pi dx^2$$

2 : Khả vi và Vi phân

Ví dụ : Cho hàm $f(x,y,z) = xy^2 - 2yz^2 + e^{x+y+z}$. Tính df, d^2f

Giải

Tương tự ví dụ trên, ta có

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$df = (y^2 + e^{x+y+z})dx + (2xy - 2z^2 + e^{x+y+z})dy + (-4yz + e^{x+y+z})dz$$

$$d^2f = f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + f_{zz} dz^2 + 2f_{xy} dx dy + 2f_{yz} dy dz + 2f_{zx} dz dx$$

$$d^2f = e^{x+y+z} dx^2 + (2x + e^{x+y+z}) dy^2 + (-4y + e^{x+y+z}) dz^2 + 2(2y + e^{x+y+z}) dx dy + 2(-4z + e^{x+y+z}) dy dz + 2(e^{x+y+z}) dz dx$$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm hợp

Định lý : Cho hàm $z = z(x, y)$ khả vi trong miền D ; x, y là các hàm theo biến t : $x=x(t), y=y(t)$ khả vi trong khoảng (t_1, t_2) , khi ấy hàm hợp $z = z(x(t), y(t))$ cũng khả vi trong khoảng (t_1, t_2) và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ví dụ : Cho hàm $z = x^2 - 3xy$, $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 3$. Tính $\frac{dz}{dt}$

Giải:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x - 3y) \cdot 2 + (-3x) \cdot 2t$$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

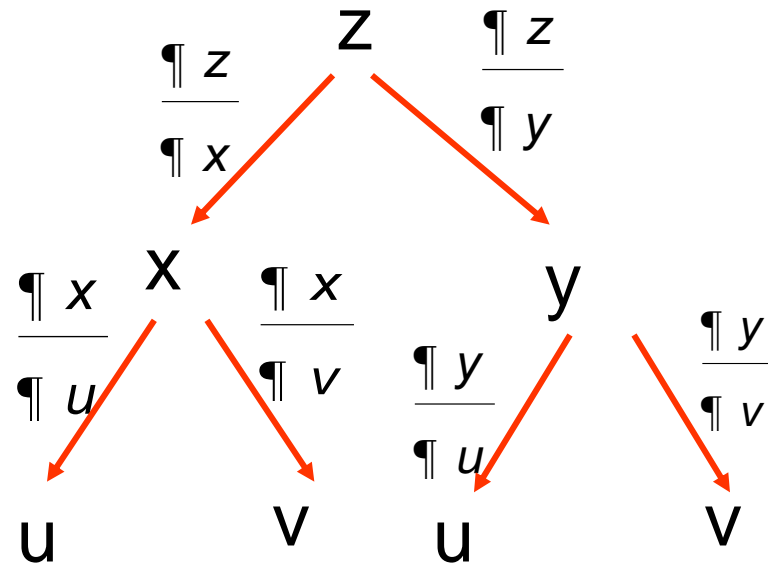
Tổng quát hơn:

Cho $z = z(x,y)$ và $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ tức là z là hàm hợp của 2 biến u, v . Ta có công thức tương tự:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Ta có thể tổng quát bằng sơ đồ sau :

Cần tính đạo hàm của z theo biến nào ta đi theo đường đến biến đó



3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ : Cho hàm $z = xe^y$, trong đó $x = \cos u + \sin v$,
 $y = u^2 + v^2$. Tính $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$

Giải: Ta sử dụng công thức trên để tính

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = e^y (-\sin u) + xe^y \cdot 2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = e^y (\cos v) + xe^y \cdot 2v$$

Chú ý: Có thể tính đạo hàm trên bằng cách *thay x, y theo u, v* vào biểu thức của hàm z rồi tính *đạo hàm thông thường*. Tuy nhiên, việc sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp (nói chung) sẽ cho ta kết quả nhanh hơn

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = f(x+y, 2x-3y)$. Tính các đhr đến cấp 2 của hàm z

Giải :

Ta đặt thêm 2 biến trung gian : $u = x+y, v = 2x - 3y$
để thấy rõ ràng hàm $z = f(u,v)$ là hàm hợp

Dùng công thức đh hàm hợp, ta được 2 đhr cấp 1:

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + 2f'_v; \quad z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - 3f'_v$$

Sau đó, lấy đhr của các đh cấp 1, ta được các đhr cấp 2:

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

$$z''_{xx} = [f'_u]'_x + 2[f'_v]'_x =$$

$$z''_{xx} = [(f'_u)'_u \cdot u'_x + (f'_u)'_v \cdot v'_x] + 2[(f'_v)'_u \cdot u'_x + (f'_v)'_v \cdot v'_x]$$

Giữ nguyên

Giữ nguyên

Lấy đh theo u thì nhân với đh của u theo

Lấy đh theo v thì nhân với đh của v theo

Lấy đh cấp 2 theo x thì tương ứng nhân với đh của u, v theo x

Tương tự: $z''_{xy} = f''_{uu} - f''_{uv} - 6f''_{vv}$ $z''_{yy} = f''_{uu} - 6f''_{uv} + 9f''_{vv}$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = y.f(x^2 - y^2)$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{Từ đó suy ra : } y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z \cdot \frac{x}{y}$$

Giải:

Ta đặt $t = x^2 - y^2$, thì f là hàm theo 1 biến t , $z = y.f$

Suy ra:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'(t) \cdot 2x = y \cdot f' \cdot 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f + y \cdot f'(t) \cdot (-2y) = f + y \cdot f' \cdot (-2y)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot y \cdot f' \cdot 2x + x \cdot f + x \cdot y \cdot f' \cdot (-2y) = x \cdot f = x \cdot \frac{z}{y}$$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm hợp

Cho hàm $z = z(x, y)$, trong đó $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.
Ta đi tính đạo hàm riêng cấp 2 của hàm z theo biến độc lập u, v

$$z''_{uu} = (z'_u)'_u = (z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u)'_u =$$

$$= [(z'_x)'_u \cdot x'_u + (z'_x) \cdot (x'_u)'_u] + [(z'_y)'_u \cdot y'_u + (z'_y) \cdot (y'_u)'_u]$$

$$= ((z'_x)'_x \cdot x'_u + (z'_x)'_y \cdot y'_u) x'_u + z'_x \cdot x''_{uu} + ((z'_y)'_x \cdot x'_u + (z'_y)'_y \cdot y'_u) y'_u + z'_y \cdot y''_{uu}$$

$$z''_{uu} = (z''_{xx} x'^2_u + 2z''_{xy} x'_u y'_u + z''_{yy} y'^2_u) + (z'_x x''_{uu} + z'_y y''_{uu})$$

Tương tự, ta có 2 đạo hàm cấp 2 còn lại

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = x^2y - xy^2$, $x = u^v$, $y = u^2 - v^2$.

Tính z'_u

Giải:

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u = (2xy - y^2)vu^{v-1} + (x^2 - 2xy)2u$$

Ta lấy đạo hàm theo v của biểu thức trên:

$$\begin{aligned} z''_{uv} &= (2xy - y^2)'_v vu^{v-1} + (2xy - y^2)(vu^{v-1})'_v + (x^2 - 2xy)'_v 2u \\ &= (2(u^v \ln u \cdot y + x(-2v)) - 2y(-2v))vu^{v-1} + (2xy - y^2)(u^{v-1} + vu^{v-1} \ln u) \\ &+ (2xu^v \ln u - 2(u^v \ln u \cdot y + x(-2v)))2u \end{aligned}$$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Vi phân cấp 1 : Cho $z = z(x,y)$ và $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ tức là z là hàm hợp của 2 biến u, v . Ta tính vi phân của hàm z theo vi phân của 2 biến độc lập u, v bằng cách dùng công thức *như hàm 2 biến thường*

$$dz = z'_v dv + z'_u du$$

Ta chỉ tính **vi phân cấp 2 của hàm z theo biến độc lập u, v** , tức là ta sử dụng công thức vi phân cấp 2 của hàm $z(u,v)$. Vậy vi phân cấp 2 của hàm hợp là

$$d^2 z = z''_{uu} du^2 + 2z''_{uv} dudv + z''_{vv} dv^2$$

3 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho $z = x \cos y$, $x = uv$, $y = u+v$. Tính dz , d^2z theo vi phân của biến độc lập du , dv

Giải:

Ta sẽ tính các đạo hàm riêng đến cấp 2, rồi thay vào công thức vi phân, ta được:

$$dz = (v \cos y - x \sin y)du + (u \cos y - x \sin y)dv$$

$$d^2z = (-2v \sin y - x \cos y)du^2 + (-2u \sin y - x \cos y)dv^2 + 2(-v \sin y + \cos y - u \sin y - x \cos y)dudv$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

1. Hàm ẩn 1 biến : Cho hàm $y=y(x)$ xác định từ phương trình hàm ẩn $F(x,y)=0$

Ví dụ: Cho phương trình đường tròn $x^2+y^2-4=0$

Khi ta tính y theo x , ta được 2 hàm ứng với 2 nửa

trên và dưới của đường tròn là $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

Khi đó tùy vào yêu cầu ban đầu lấy phần nào của đường tròn, ta sẽ lấy phần tương ứng.

Chẳng hạn, ban đầu có thêm điều kiện $y \geq 0$.

Khi đó, ta nói hàm $y=y(x)$, $y \geq 0$ xác định bởi pt hàm ẩn $x^2+y^2=4$ là .

$$y = + \sqrt{4 - x^2}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Tuy vậy, thông thường ta sẽ gặp các phương trình hàm ẩn không thể tính y theo x như pt sau

$$e^{x+y} \sin x - 3e^{2x-y} \cos y = 0$$

Ta tính đạo hàm y' bằng cách lấy đạo hàm 2 vế phương trình $F(x,y)=0$ bằng công thức đạo hàm hàm hợp theo x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Ta tính } \frac{dy}{dx} \text{ từ đẳng thức này}$$

để được công thức

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Tính y' , y'' biết $x - y + \arctan y = 0$

Giải:

Ta đặt $F(x,y) = x - y + \arctan y$, rồi áp dụng công thức

$$y' = - \frac{F_x'}{F_y'} = - \frac{1}{-1 + \frac{1}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2}$$

Để tính đạo hàm cấp 2, ta lấy đạo hàm của đạo hàm cấp 1 với ghi nhớ rằng y' đã có trước đó để thay vào kết quả y'' .

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)' = - \frac{2yy'}{y^4} = - \frac{2(y^2 + 1)}{y^5}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Hàm ẩn nhiều biến: Cho hàm $z=z(x,y)$ xác định từ phương trình hàm ẩn $F(x,y,z) = 0$. Ta phải tính 2 đạo hàm riêng

Tương tự hàm ẩn 1 biến, ta có công thức tính đạo hàm

$$z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z}$$

Hoặc ta có thể tính đạo hàm riêng của hàm z theo x, y bằng cách lấy đạo hàm 2 vế phương trình hàm ẩn lần lượt theo x, y (Coi biến còn lại là hằng số)

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Cho hàm $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 5z + 2 = 0$. Tính z'_x, z'_y

Giải:

Cách 1: Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo x , coi y là hằng số

$$2x + 2zz'_x - 3 - 5z'_x = 0 \quad \text{Đ} \quad z'_x = \frac{3 - 2x}{2z - 5}$$

Và lấy đạo hàm theo y , coi x là hằng số

$$2y + 2zz'_y + 6 - 5z'_y = 0 \quad \text{Đ} \quad z'_y = \frac{6 + 2y}{5 - 2z}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Cách 2: Sử dụng công thức bằng cách đặt $F(x,y,z)$ là vế trái của phương trình đã cho

$$F_x = 2x - 3, F_y = 2y + 6, F_z = 2z - 5$$

Ta cũng sẽ được kết quả như trên.

Để có đạo hàm cấp 2, ta lấy đạo hàm của đạo hàm cấp 1, và nhớ rằng z là hàm, biến còn lại là hằng số

Vi phân của hàm ẩn: hàm $y(x)$ hoặc $z(x,y)$ đều là các hàm theo 1 hoặc 2 biến độc lập nên ta tính vi phân các cấp của chúng như với hàm bình thường

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ: Tính dz , d^2z nếu $ze^x + 3y + z - 1 = 0$ tại $(0, 1)$

Giải:

Trước tiên, ta thay $(x, y) = (0, 1)$ vào phương trình để được $z = -1$

Tiếp đó, ta tính các đạo hàm riêng đến cấp 2 bằng cách đặt $F(x, y, z)$ là vế trái của phương trình trên

$$z'_x = -\frac{ze^x}{e^x + 1}, z'_y = -\frac{3}{e^x + 1} \quad \text{P} \quad z'_x(0, 1) = \frac{1}{2}, z'_y(0, 1) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{P} \quad dz(0, 1) = \frac{1}{2}(dx - 3dy)$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z e^x}{e^x + 1} \right) = \frac{z \cdot z e^x}{z e^x + z}$$

Ta thay $z e^x = 1 - 3y - z$ vào biểu thức trên rồi tính đạo hàm tiếp

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z(1 - 3y - z)}{1 - 3y} \right) = - \frac{z'_x(1 - 3y - z) + z(-z'_x)}{(1 - 3y)}$$

$$z''_{xx} = z'_x \frac{z - (1 - 3y - z)}{(1 - 3y)} \quad \text{Thay } z'_x(0, 1) = \frac{1}{2} \text{ vào, ta được } z''_{xx}(0, 1) = 0$$

Tương tự, ta tính được 2 đạo hàm riêng cấp 2 còn lại. Và được

$$d^2 z(0, 1) = \frac{3}{4} dx dy$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Cho hàm $z = f(x+y, x.y)$, tính vi phân dz , d^2z

Giải: Ta đi tính đạo hàm riêng đến cấp 2 của hàm z

Trước hết, ta đặt $t = x+y$, $s = x.y$ thì z là hàm theo 2 biến t và s , còn t , s là hàm theo 2 biến x và y . Ta được

$$z'_x = f'_t t'_x + f'_s s'_x = f'_t \cdot 1 + f'_s \cdot y; \quad z'_y = f'_t t'_y + f'_s s'_y = f'_t \cdot 1 + f'_s \cdot x$$

Suy ra $dz = (f'_t + f'_s \cdot y)dx + (f'_t + f'_s \cdot x)dy$

$$z''_{xx} = (f'_t + f'_s \cdot y)'_x = [(f''_{tt} \cdot t'_x + f''_{ts} \cdot s'_x) + (f''_{st} \cdot t'_x + f''_{ss} \cdot s'_x) \cdot y]$$

$$z''_{xx} = f''_{tt} + 2yf''_{st} + y^2 \cdot f''_{ss}$$

Tương tự, ta được 2 đạo hàm cấp cao còn lại và

$$d^2z = (f''_{tt} + 2yf''_{st} + y^2 \cdot f''_{ss})dx^2 + (f''_{tt} + 2xf''_{st} + x^2 \cdot f''_{ss})dy^2 + (f''_{tt} + (x+y)f''_{ts} + xyf''_{ss} + f''_{ss})2dxdy$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ: Tính z'_x, z'_y nếu $z = z(x,y)$ xác định từ pt
 $F(x+y+z, x+y-2z) = 0$

Giải :

Tương tự ví dụ trên, ta cũng đặt thêm 2 biến trung gian $t = x+y+z, s = x+y-2z$ để được **F là hàm theo 2 biến t và s**

Trước tiên, ta dùng công thức đạo hàm hàm ẩn

$$z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z}$$

Tức là ta phải tính 3 đạo hàm riêng của hàm F theo 3 biến độc lập x, y, z.

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Khi đó, ta coi F là hàm hợp theo t, s với t, s là hàm theo 3 biến x, y, z để sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp ($t = x+y+z, s = x+y-2z$)

$$F'_x = F'_t \cdot t'_x + F'_s \cdot s'_x = F'_t + F'_s$$

$$F'_y = F'_t \cdot t'_y + F'_s \cdot s'_y = F'_t + F'_s, \quad F'_z = F'_t - 2F'_s$$

Thay vào công thức trên, ta được kết quả

$$z'_x = - \frac{F'_t + F'_s}{F'_t - 2F'_s} = z'_y$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Công thức Taylor với phần dư Peano:

Cho hàm $f(x,y)$ khả vi đến cấp $(n+1)$ trong 1 r-lân cận của M_0 tức là $d(M, M_0) < r$. Ta có công thức:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + R_n(x, y)$$

Trong đó: $R_n(x, y) = O(r^n), r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Khi $(x_0, y_0) = (0, 0)$ thì công thức Taylor được gọi là công thức Maclaurint

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(0, 0)}{k!} + R_n(0, 0)$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ : Khai triển Tay lor tại lân cận điểm $(1,-1)$ hàm
 $f(x,y) = x^2+2y^2-3xy+4x-5y+7$

Giải :

Do $f(x,y)$ là đa thức bậc 2 theo x hoặc theo y nên từ cấp 3 trở đi, các đạo hàm riêng bằng 0 tức là vi phân cũng bằng 0. Ta chỉ cần tính vi phân của f đến bậc 2

$$f(1,-1) = 22$$

$$f'_x = 2x - 3y + 4, f'_y = 4y - 3x - 5$$

$$\implies f'_x(1,-1) = 9, f'_y(1,-1) = -12$$

$$\implies df(1,-1) = 9dx - 12dy = 9(x-1) - 12(y+1)$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

$$f''_{xx} = 2, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 4$$

$$d^2f = 2dx^2 - 6dxdy + 4dy^2$$

$$\implies = 2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 4(y+1)^2$$

Vậy :

$$f(x,y) = 22 + [9(x-1) - 12(y+1)] + \\ \frac{1}{2} [2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 4(y+1)^2]$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Chú ý :

Tương tự như hàm 1 biến, để khai triển Tay lor hàm $f(x,y)$ trong lân cận điểm (x_0,y_0) ta cũng làm như sau :

1. Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0 \iff x = X + x_0, y = Y + y_0$
2. Sử dụng **khai triển Maclaurint hàm 1 biến** để khai triển hàm $f(X, Y)$
3. Sắp xếp theo thứ tự **bậc của X, Y, X.Y tăng dần**
4. Thay $X = x - x_0, Y = y - y_0$ vào để được khai triển cần tìm

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(2,1)$ đến bậc 2 hàm

$$f(x, y) = \frac{1}{2x - 3y}$$

Giải :

$$\text{Đặt } X = x - 2, Y = y - 1 \iff x = X + 2, y = Y + 1$$

$$\text{Thay vào hàm đã cho, ta được: } f(X, Y) = \frac{1}{2X - 3Y + 1}$$

Đặt $t = 2X - 3Y$ và áp dụng khai triển Maclaurint hàm

$$g(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + R_2 \quad \text{Và thay vào hàm } f$$

$$f(x, y) = 1 - (2(x-2) - 3(y-1)) + ((2(x-2) - 3(y-1))^2 + R_2$$

$$f(x, y) = 1 - 2(x-2) + 3(y-1) + 4(x-2)^2 + 9(y-1)^2 - 12(x-2)(y-1) + R_2$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x,y) = e^x \cos y$ đến bậc 2

Giải:

Ta áp dụng trực tiếp khai triển Maclaurint cho 2 hàm 1 biến e^x và $\cos y$ để có kết quả:

$$f(x,y) = (1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^2))(1-\frac{1}{2}y^2+O(y^2))$$

$$f(x,y) = 1+x+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y^2 + R_2$$

Ta bỏ các số hạng bậc lớn hơn 2 và sắp xếp theo thứ tự tăng dần của bậc, ta được :

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + R_2$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Định nghĩa:

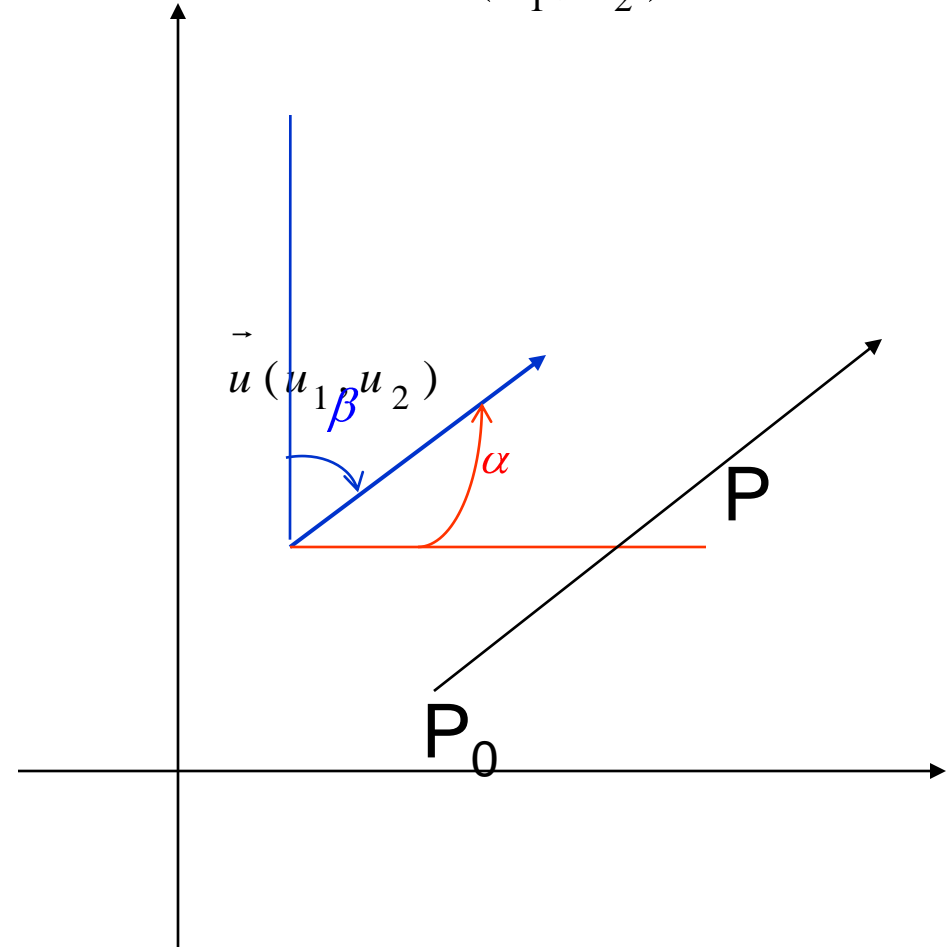
Cho hàm 2 biến $z=f(x,y)$ và cho vecto $\vec{u}(u_1, u_2)$

Gọi $\alpha = \angle(\vec{Ox}, \vec{u})$, $\beta = \angle(\vec{Oy}, \vec{u})$

Thì vecto đơn vị cùng phương với vecto u là $(\cos\alpha, \cos\beta)$

Tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ cho trước, ta vẽ 1 tia P_0t cùng phương và chiều với vecto u

Trên tia này, ta lấy 1 điểm $P(x,y)$ tùy ý



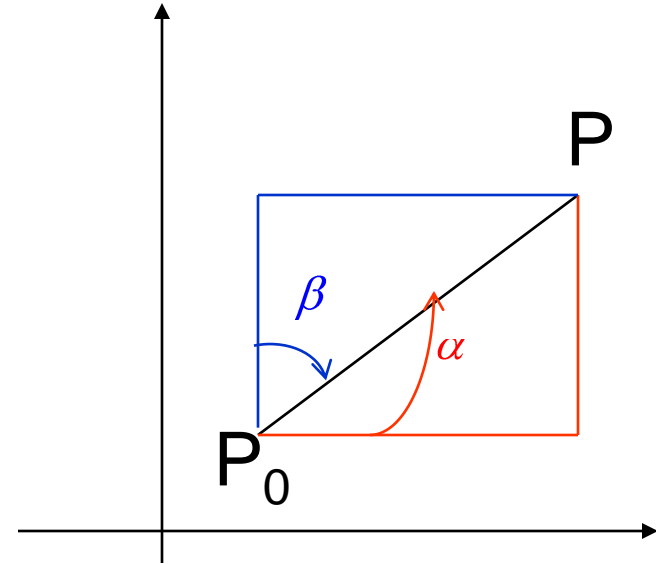
6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Ta định nghĩa đạo hàm của hàm $f(x,y)$ theo hướng vecto $\vec{u}(u_1, u_2)$ là giới hạn hữu hạn (nếu có)

$$f'_u(P_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{PP_0}$$

Đặt $PP_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = t$

Thì : $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \end{cases}$ Suy ra:



$$f'_u(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Đặt $g(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta)$ thì

$g(0) = f(x_0, y_0)$ và $g'(t) = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Mà $g'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$ Suy ra $f'_u = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t$

Vậy $f'_u(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \cos \beta$

$$f'_u(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta)$$

Ta gọi Vecto gradient của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) là

$$\overrightarrow{\text{grad} f}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

Và ta có đh theo hướng bằng tích vô hướng của vecto gradient và vecto đơn vị

$$f'_u(x_0, y_0) = \overrightarrow{\text{grad} f}(x_0, y_0) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta)$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Tương tự cho hàm 3 biến $f(x,y,z)$

$$f'_u(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\text{grad} f(x_0, y_0, z_0)} \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad \text{Trong đó}$$

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \alpha = g(\overrightarrow{Ox}, \vec{u}), \beta = g(\overrightarrow{Oy}, \vec{u}), \gamma = g(\overrightarrow{Oz}, \vec{u})$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, \cos \beta = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, \cos \gamma = \frac{u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

Hoặc viết dưới dạng

$$f'_u = \nabla f \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Ví dụ: Tính đh theo hướng $\vec{u} = (6, 3, -6)$ của hàm

$$f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}$$

Giải

Trước hết, ta tính vecto đơn vị ứng với vecto \vec{u}

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{9}(6, 3, -6)$$

Sau đó tính $\overrightarrow{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right)$

Vậy:
$$f'_u(M) = \left(\overrightarrow{grad} f, \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{-1}{9} = \frac{1}{3}$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Ví dụ: Tính đh tại $(1, -1)$ theo hướng vecto đơn vị u của hàm $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$ biết góc giữa trục Ox và vecto u là $\pi/3$

Giải

Với đề bài trên, ta có vecto đơn vị ứng với \vec{u} là

$$(\cos \alpha, \cos \beta) = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(1, -1) = (f'_x(1, -1), f'_y(1, -1)) = (-1, 7)$$

$$f'_u(1, -1) = \frac{7\sqrt{3} - 1}{2}$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Ta có: $f'_u = \nabla f \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \leq \|\vec{grad} f\| \cdot \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \|\vec{grad} f\|$

Suy ra:

$$\begin{cases} f'_{u \max} = \|\vec{grad} f\| \text{ khi } \vec{u} \text{ cùng hướng với } \vec{grad} f \\ f'_{u \min} = -\|\vec{grad} f\| \text{ khi } \vec{u} \text{ ngược hướng với } \vec{grad} f \end{cases}$$

Nếu $\vec{u} = (1, 0, 0)$ thì $f'_u = f'_x$

Tức là đh theo hướng vecto đơn vị trên trục nào thì chính là đh riêng của hàm theo biến đó

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Ví dụ: Cho hàm $f(x, y, z) = x^2 y - 2 yz + 4 z^2 x + 3 xyz$ và điểm $M_0(2, -1, 0)$. Tìm hướng sao cho đh của f theo hướng đó đạt GTLN, GTNN và tính 2 giá trị đó.

Giải:

Ta tính $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)) = (-4, 4, -4)$

Đặt $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$ Thì ta được

$$\begin{cases} f'_{\vec{u}} \max = 4\sqrt{3} \\ f'_{-\vec{u}} \min = -4\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Với hướng cần tìm là hướng } (-1, 1, -1)$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient

Tiếp diện của mặt cong:

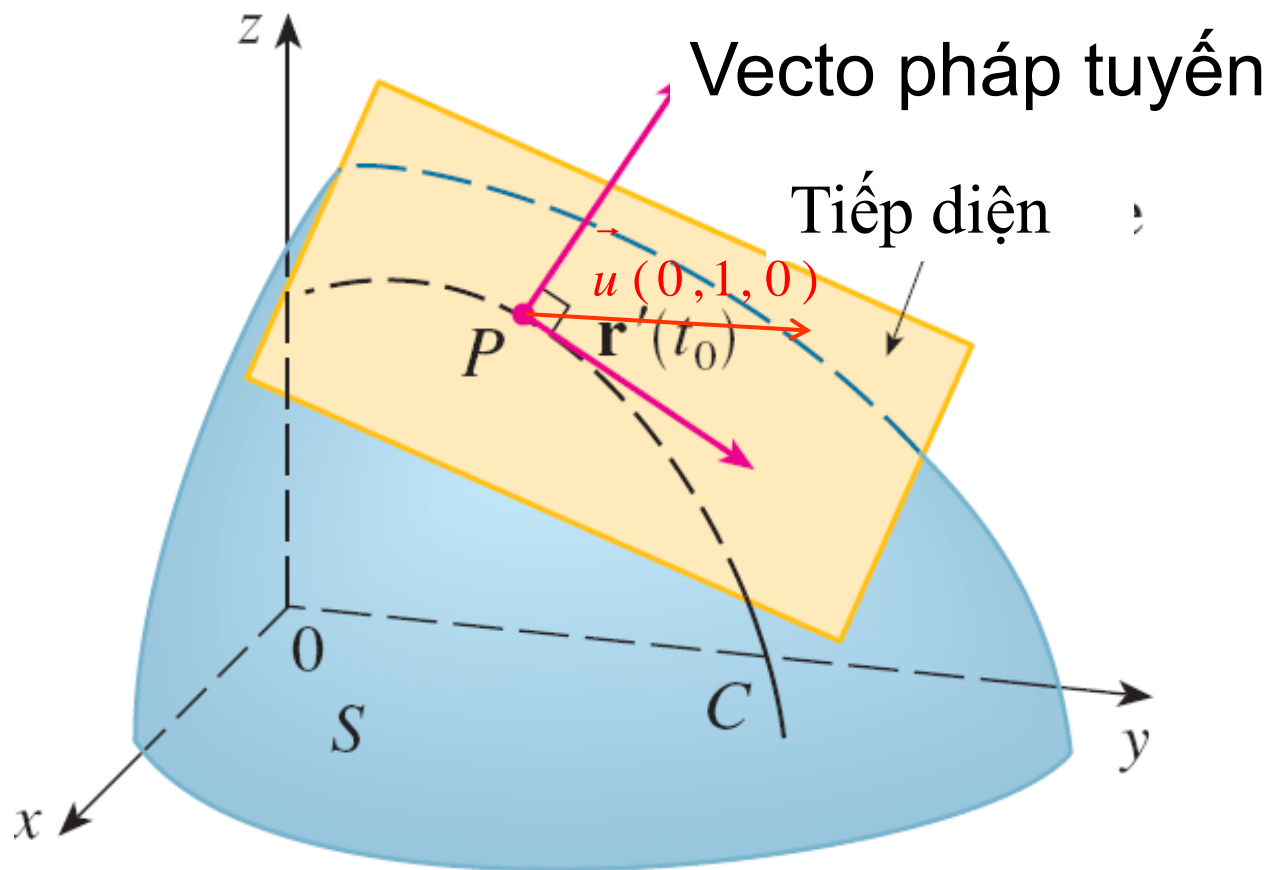
Cho mặt cong S có phương trình $F(x,y,z)=0$. Tiếp diện của mặt cong S tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$ thuộc mặt cong có phương trình là

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Và phương trình pháp tuyến tại P là:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

6: Đạo hàm theo hướng – Vecto gradient



Pháp vecto của mặt S chính là vecto grad của hàm f

Đh theo hướng vecto $\vec{u}(0, 1, 0)$

Là đhr của hàm f theo biến y

$$f'_u(P) = f'_x(P)$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến

Định nghĩa : Hàm $f(x,y)$ được gọi là **đạt cực đại chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại 1 lân cận của M_0 sao cho $f(x,y) < f(x_0,y_0)$, với mọi $M(x,y)$ thuộc lân cận trên

Tức là:

$$\exists r > 0, \forall M(x,y), d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

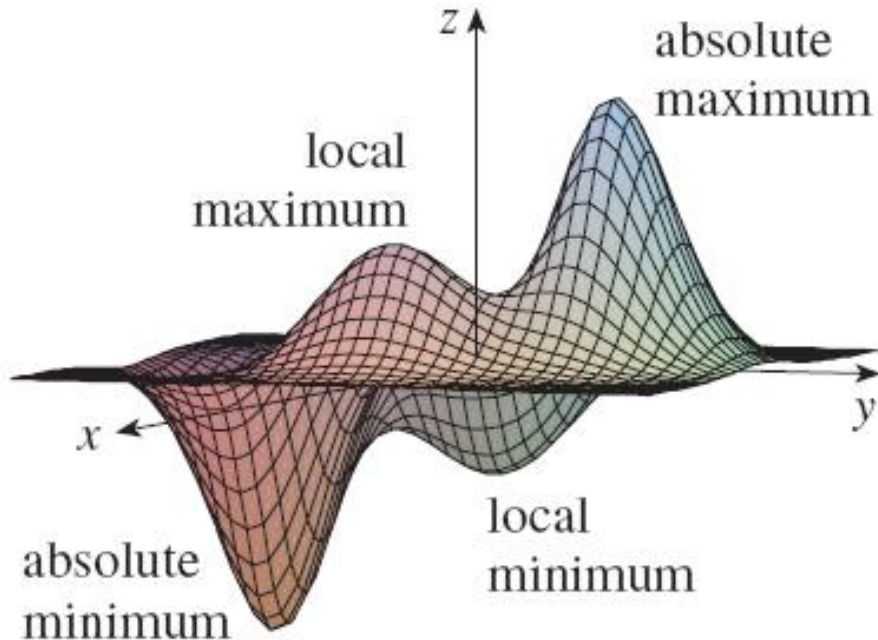
Sao cho : $f(x,y) < f(x_0,y_0)$

Định nghĩa : Hàm $f(x,y)$ được gọi là **đạt cực đại không chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại 1 lân cận của M_0 sao cho $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$, với mọi $M(x,y)$ thuộc lân cận trên.

7 : Cực trị hàm nhiều biến

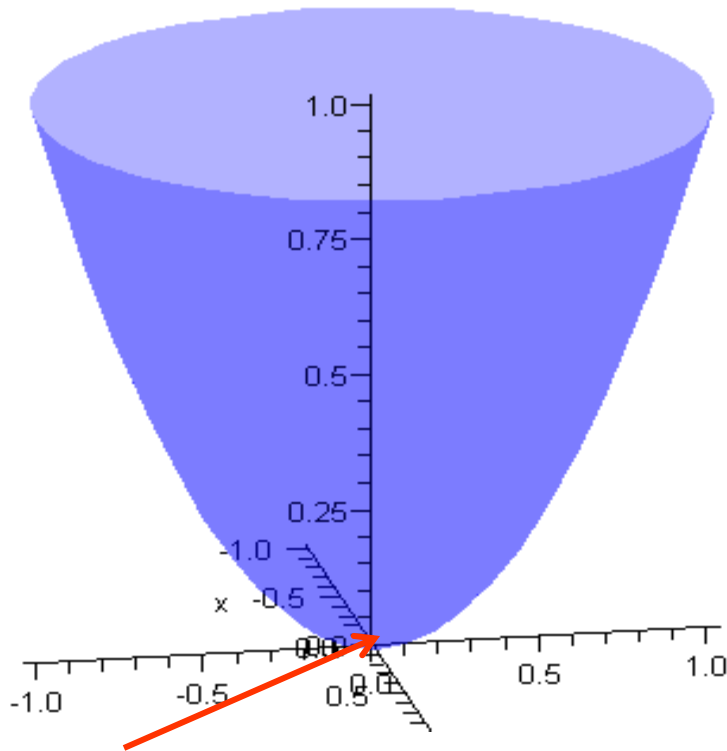
Định nghĩa tương tự cho khái niệm cực tiểu chặt và cực tiểu không chặt.

Chú ý: Khái niệm cực trị chỉ mang tính địa phương, nó khác với khái niệm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm trong một miền (Xem hình vẽ)



7 : Cực trị hàm nhiều biến - Cực trị tự do

Ví dụ: Hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại $(0,0)$ vì $f(x,y) - f(0,0) = (x^2 + y^2) \geq 0$, với mọi (x,y)



Hơn nữa, $f(0,0) = 0$
còn là giá trị nhỏ
nhất của hàm trong
toàn MXĐ vì :

$$f(x,y) - f(0,0) > 0, \forall (x,y)$$

$$f(0,0) = 0$$

Điểm cực tiểu

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Điều kiện cần của cực trị : Nếu hàm $f(x,y)$ có cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ thì tại M_0 hàm có các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 hoặc không tồn tại

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 hoặc không tồn tại thì gọi là **điểm tới hạn** của hàm tức là điểm nghi ngờ có cực trị.

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 thì gọi là **điểm dừng** của hàm.

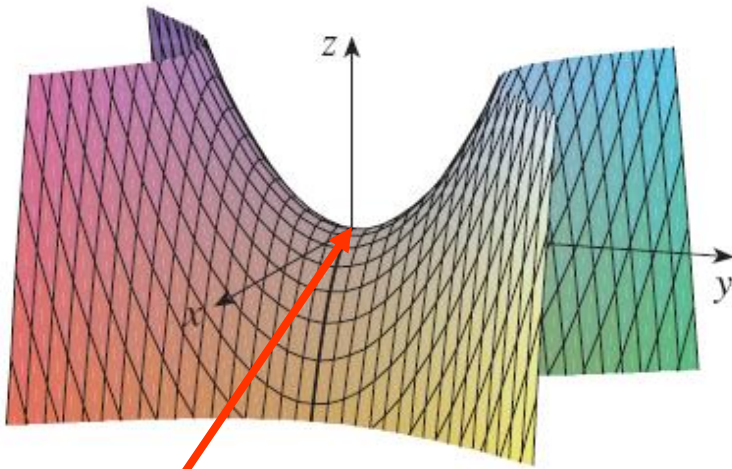
Điểm M mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 và trong 1 lân cận bất kỳ của nó tồn tại các điểm M_1, M_2 sao cho $f(M_1) < f(M) < f(M_2)$ được gọi là **điểm yên ngựa**

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Khảo sát cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 - y^2$

Giải:

Ta có : $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$ \implies Điểm dừng của hàm là $O(0,0)$



Điểm yên ngựa

Với mọi x , ta có

$$f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$$

Với mọi y , ta có

$$f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$$

Vậy hàm không đạt cực trị tại $(0,0)$, điểm $(0,0)$ là điểm yên ngựa của hàm

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Điều kiện đủ của cực trị : Cho hàm $f(x,y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong 1 lân cận của điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$. Ta có :

1. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ xác định dương thì hàm đạt **cực tiểu chặt** tại M_0 , $f_{ct} = f(M_0)$
2. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ xác định âm thì hàm đạt **cực đại chặt** tại M_0 , $f_{cd} = f(M_0)$
3. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ không xác định thì hàm **không đạt cực trị** tại M_0

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Các bước khảo sát cực trị hàm nhiều biến

Bước 1: *Tìm điểm tới hạn* bằng cách cho tất cả các đạo hàm riêng của hàm f bằng 0, ta được hệ phương trình, giải ra ta được điểm dừng hoặc tìm những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng không tồn tại

Bước 2: *Khảo sát dấu của d^2f tại từng điểm dừng* vừa tìm được (coi d^2f là dạng toàn phương theo dx, dy, dz, \dots)

Bước 3: Kết luận theo điều kiện đủ

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 8z$

Giải:

Bước 1: Giải hpt tìm điểm dừng

$$f'_x = 2x - 4 = 0$$

$$f'_y = 2y + 6 = 0$$

$$f'_z = 4z - 8 = 0$$

$$x = 2$$

$$\hat{U} \quad y = -3$$

$$z = 2$$

Vậy hàm có điểm
dừng duy nhất
 $M(2, -3, 2)$

Bước 2: Tính $d^2f(M) = 2dx^2 + 2dy^2 + 4dz^2 \geq 0$ với mọi M.

Bước 3: Kết luận Hàm đạt cực tiểu tại điểm dừng duy nhất $f_{ct} = f(2, -3, 2) = -21$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Với riêng hàm 2 biến $f(x,y)$, ta có các bước khảo sát sau

1. Tìm điểm dừng (giả sử là $M_i(x_i, y_i)$)

2. Tính 3 đạo hàm riêng cấp 2 của hàm và đặt

$$A = f''_{xx}(M_i), B = f''_{xy}(M_i), C = f''_{yy}(M_i) \text{ và } \Delta = AC - B^2$$

3. Xét dấu Δ :

- Nếu $\Delta > 0$ và $A > 0$ thì hàm đạt cực tiểu $f_{ct} = f(M_i)$
- Nếu $\Delta > 0$ và $A < 0$ thì hàm đạt cực đại $f_{cd} = f(M_i)$
- Nếu $\Delta < 0$ thì hàm không đạt cực trị tại M_i
- Nếu $\Delta = 0$, thì ta phải xét dấu $\Delta f = f(M) - f(M_i)$ với mọi M thuộc lân cận của M_i và sử dụng định nghĩa cực trị.

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Giải: *Tìm điểm dừng*

$$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 - 3x = 0$$

Ta tìm được 2 điểm $M_1(1,1)$ và $M_2(0,0)$

Tìm các đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$

Tại M_1 : $C = A = 6 > 0$, $B = f''_{xy}(1,1) = -3$,

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)(-3) > 0.$$

Hàm đạt cực tiểu : $f_{ct} = f(1,1) = -1$

Tại M_2 : $A = f''_{xx}(0,0) = 0 = C$, $B = f''_{xy}(0,0) = -3$, $\Delta = -9 < 0$

Hàm không đạt cực trị tại M_2

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

Giải : Tìm điểm dừng
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \hat{=} x - y + 1 = 0$$

Hàm có vô số điểm dừng: tập tất cả các điểm

$M(x_0, y_0)$ thỏa $x_0 - y_0 + 1 = 0$, $M(x_0, x_0 + 1)$

Các đạo hàm riêng cấp 2 là hằng số, nên :

$A = f''_{xx} = 2$, $B = f''_{xy} = -2$, $C = f''_{yy} = 2$, $\Delta = 0$, với mọi M

Đây là trường hợp ta **phải xét dấu**

$\Delta f(M) = f(x,y) - f(x_0, x_0 + 1)$ với mọi (x,y) thuộc lân cận của M .

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ta có : $\Delta f(M) = f(x, y) - f(M)$

$$\Delta f(M) = (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y) - (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 + 2x_0 - 2y_0)$$

$$\Delta f(M) = (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y) - ((x_0 - y_0)^2 + 2(x_0 - y_0))$$

Thay $x_0 - y_0 = -1$ vào, ta được

$$\Delta f(M) = (x - y + 1)^2 \geq 0 \iff f(x, y) \geq f(M)$$

Vậy theo định nghĩa, hàm đạt cực tiểu không chặt tại mọi điểm dừng M_0 và $f_{ct} = f(M_0) = f(x_0, x_0 + 1) = -1$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Giải : Từ hệ phương trình :

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0 \end{aligned}$$

Ta được $x = y = 0$, tuy nhiên $(0,0)$ là điểm mà tại đó 2 đạo hàm trên có thể không tồn tại, hpt vô nghiệm.

Do đó, điểm $(0,0)$ không là điểm dừng của hàm.

Vậy ta sẽ tính đạo hàm riêng của f tại $(0,0)$ bằng định nghĩa:

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

$$f'_x(0,0) = \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{f(Dx,0) - f(0,0)}{Dx} = \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{Dx^2} - 0}{Dx} = \infty$$

Do vai trò x, y như nhau trong hàm f , nên tương tự ta cũng có $f'_y(0,0) = \infty$

Vậy tại $(0,0)$ các đạo hàm riêng không tồn tại hữu hạn nên $(0,0)$ chỉ là điểm tới hạn của hàm, tức là điểm nghi ngờ có cực trị.

$$\text{Mặt khác: } \Delta f = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \geq 0, \forall (x,y)$$

Tức là $(0,0)$ là điểm cực tiểu của hàm.

Hơn nữa, $f(0,0) = 0$ nên ta có

$$f_{ct} = f_{min} = f(0,0)$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ : Khảo sát cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$$

Giải :

$$\begin{array}{l} \text{Tìm điểm dừng :} \\ \begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Ta được 3 điểm dừng $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(0,0)$

Các đạo hàm riêng đến cấp 2 :

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$:

$$C = 10 = A > 0, B = -2, \Delta = 100 - 4 > 0$$

$$\text{Nên } f_{ct} = f(1,1) = f(-1,-1) = -2$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Tại $M_3(0,0)$: $A = B = C = -2$, $\Delta = 0$.

Ta phải **xét dấu** $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$, với mọi (x,y) gần với $(0,0)$ bằng cách chọn 2 điểm

$N_1(1/n, 1/n)$, $N_2(1/n, -1/n)$ và tính $\Delta f(N_1)$, $\Delta f(N_2)$

$$D f(N_1) = D f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} - \frac{4}{n^2} = \frac{2}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0, \quad n > 1$$

$$D f(N_2) = D f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0, \quad n > 1$$

Như vậy, Δf đổi dấu trong lân cận điểm dừng M_3 tức là hàm không đạt cực trị tại M_3

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Cho hàm $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.
Điểm nào sau đây là cực trị của hàm : $M_1(1, -2, 1/2)$,
 $M_2(-1/2, -5/4, -1/4)$

Giải:

Ta chỉ cần kiểm tra 2 điều kiện :

1. M_i là điểm tới hạn (với hàm này, chỉ cần là điểm dừng)
2. $d^2f(M_i)$ là xác định dương, âm hay không xác định

1. M_1, M_2 là điểm dừng tức là chúng nghiệm đúng hệ :

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y - 2z = 0 \\ f'_y = x + 2y + 3 = 0 \\ f'_z = -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

2. Tính $d^2f(x,y,z) = 6dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 - 4dxdz + 4dz^2$ và thay từng điểm dừng vào để xét dấu dạng toàn phương :

$d^2f(M_1) = 6dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 - 4dxdz + 4dz^2$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D_1 = 6 > 0, D_2 = 11 > 0, D_3 = 36 > 0$$

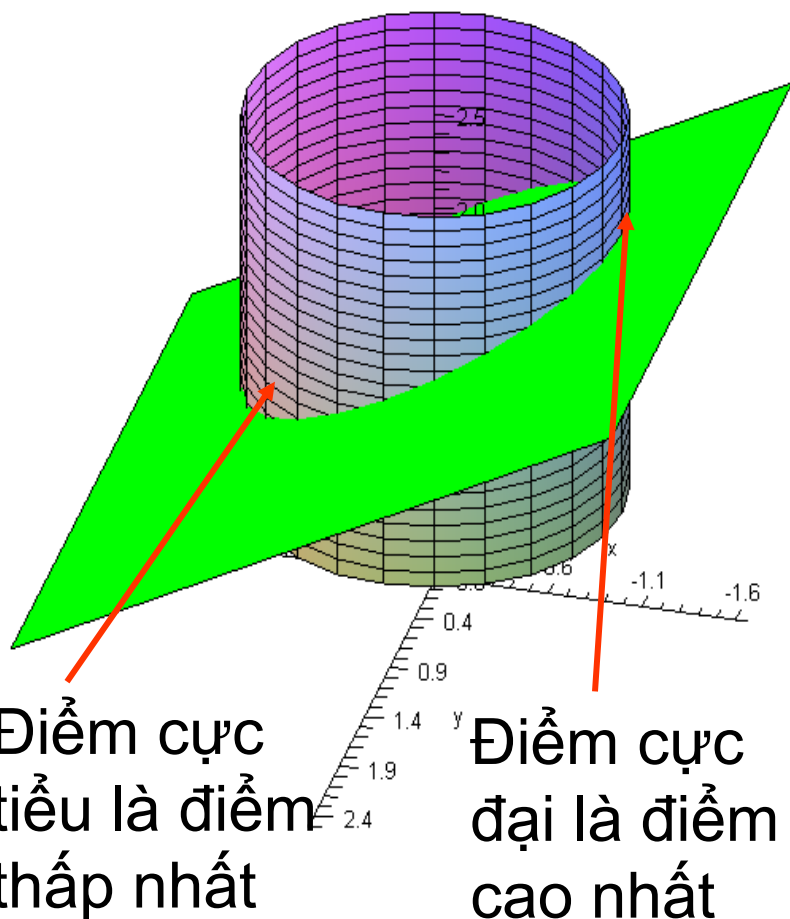
Tức là $d^2f(M_1)$ là xác định dương, hàm đạt cực tiểu tại M_1 , $f_{ct} = f(M_1) = -9/2$

$$d^2f(M_2) = -3dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 - 4dxdz + 4dz^2$$

Bằng cách như trên (theo tiêu chuẩn Sylvester), ta có kết luận hàm không đạt cực trị tại M_2

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Xét hàm $f(x,y) = 2 - 2x - 2y$. Không khó khăn gì, ta thấy hàm không có cực trị.



Nếu vẽ đồ thị, thì ta được mặt phẳng $z = 2 - 2x - 2y$, rõ ràng **không có cực trị**. Tuy nhiên, nếu ta cắt mặt phẳng trên bởi hình trụ tròn xoay $x^2 + y^2 = 1$ thì giao tuyến là 1 ellipse và khi đó hàm ban đầu có cực trị.

Khi đó, ta nói **hàm f có cực trị với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$**

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Định nghĩa cực trị có điều kiện : Hàm $f(x,y)$ được gọi là đạt **cực đại chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$, với mọi M nằm trong hình cầu $B(M_0,r)$ và thỏa điều kiện trên

Thay dấu “ $<$ ” bởi dấu “ \leq ” ta được **cực trị không chặt có điều kiện**, và lấy dấu ngược lại ta có khái niệm cực tiểu có điều kiện

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 - 9y^2 + 3xy + 6x - 5$ với điều kiện $2x - 3y = 0$

Giải :

Từ điều kiện, ta rút ra $y = \frac{2}{3}x$ và thay vào hàm f:

$$f(x,y) = x^2 - 9\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 3x\left(\frac{2}{3}x\right) + 6x - 5 = -x^2 + 6x - 5$$

Tức là ta có hàm 1 biến và đi tìm cực trị của hàm 1 biến như bình thường.

$$\text{Tìm điểm dừng : } f' = 0 \iff -2x + 6 = 0 \iff x = 3$$

Vậy hàm đạt cực đại tại điểm dừng duy nhất (3,2)

$$f_{cđ} = f(3,2) = 4$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Tuy nhiên, hầu hết các trường hợp cực trị có điều kiện, ta không dễ dàng rút ra y theo x hoặc x theo y như trên. Vì vậy, ta sẽ xây dựng cách tìm cực trị có điều kiện 1 cách tổng quát hơn dựa trên cách tìm cực trị tự do như sau

Ta sẽ giả thiết rằng điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ tại lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$, tức là $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, ta thay $y = y(x)$ vào hàm f , ta được hàm 1 biến $f(x, y(x))$. Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ thì

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$\frac{df}{dx}(x_0) = 0 \hat{=} f'_x(x_0, y_0) + y'_x(x_0) f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (1)$$

Mặt khác, từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, ta cũng có

$$\varphi'_x(x_0, y_0) + y'_x(x_0) \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (2)$$

Nhân 2 vế (2) với λ , rồi cộng với (1), ta được

$$[f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0)] + y'_x(x_0) [f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0)] = 0$$

Vì $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên ta có thể tìm được hằng số λ_0 sao cho :

$$\lambda_0 = - \frac{f'_y(x_0, y_0)}{y'_x(x_0, y_0) \varphi'_y(x_0, y_0)} \iff f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

Thay vào đẳng thức trên, ta cũng được

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

Kết hợp điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ với các đẳng thức (3), (4) ta được hệ pt :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda'_j \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda'_j \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Và x_0, y_0, λ_0 là 1 nghiệm của hệ

Ta đặt hàm $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ thì hpt trở thành

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Vậy ta có điều kiện cần của cực trị có điều kiện :

Định lý : Cho hàm $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có các đhr liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$, $\varphi'_x(x_0,y_0) \neq 0$ hoặc $\varphi'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Khi đó, hàm $f(x,y)$ có cực trị với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ tại M_0 thì tồn tại số λ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange, hàm $L(x,y)$ ở trên được gọi là hàm Lagrange, nghiệm $M_0(x_0,y_0)$ của hệ gọi là điểm dừng

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Định lý : (Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện) Giả sử các hàm $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có các đhr đến cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$ ứng với $\lambda = \lambda_0$. Khi đó, ta có các kết luận:

1. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là xác định dương thì M_0 là điểm cực tiểu
2. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là xác định âm thì M_0 là điểm cực đại
3. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là không xác định hàm không đạt cực trị tại M_0

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Cách tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$

1. Nếu từ pt $\varphi(x,y) = 0$, ta rút ra $y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$ thì thay vào hàm f để được hàm 1 biến
2. Nếu không thực hiện được như trên thì ta làm theo phương pháp nhân tử Lagrange

a. Lập hàm Lagrange: $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

b. Giải hpt

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Để tìm điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ ứng với $\lambda = \lambda_0$

c. Xét dấu dạng toàn phương $d^2L(x_0, y_0)$, với $\lambda = \lambda_0$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

Giải :

1. Lập hàm $L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

2. Giải hpt tìm điểm dừng

$$\begin{array}{l} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \quad \hat{=} \quad \begin{array}{l} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Thay x, y từ 2 pt trên xuống pt cuối cùng. Ta được 2 điểm dừng :

$$M_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ và } \lambda_1 = \frac{5}{2}; \quad M_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \text{ và } \lambda_2 = -\frac{5}{2}$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

3. Tính vi phân cấp 2 của hàm $L(x,y)$

$$d^2L(x,y) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$$

4. Xét dấu d^2L tại từng điểm dừng

Tại M_1 với $\lambda_1 = 5/2$, ta được $d^2L(M_1) = 5(dx^2 + dy^2)$ là xác định dương, vậy $f_{ct} = f(M_1) = f(4/5, 3/5) = 1$

Tại M_2 với $\lambda_2 = -5/2$, ta được $d^2L(M_2) = -5(dx^2 + dy^2)$ là xác định âm, vậy $f_{cđ} = f(M_2) = f(-4/5, -3/5) = 11$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Giải : Ta cũng làm theo các bước như với hàm 2 biến

1. Lập hàm $L(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

2. Tìm điểm dừng bằng cách giải hpt

$$L'_x = 1 + 2\lambda x$$

$$L'_y = -2 + 2\lambda y$$

$$L'_z = 2 + 2\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ta được 2 điểm dừng

$$M_1(1/3, -2/3, 2/3), \lambda_1 = -3/2$$

$$M_2(-1/3, 2/3, -2/3), \lambda_2 = 3/2$$

3. Tính $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$,

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

4. Xét tại từng điểm dừng

$$d^2L(M_1) = -3(dx^2+dy^2+dz^2) \text{ – xác định âm nên}$$

$$f_{ct} = f(M_1) = f(1/3, -2/3, 2/3) = 3$$

$$d^2L(M_2) = 3(dx^2+dy^2+dz^2) \text{ – xác định dương nên}$$

$$f_{ct} = f(M_2) = f(-1/3, 2/3, -2/3) = -3$$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^2+2y^2+12xy$ với điều kiện $4x^2+y^2 = 25$

Giải: $L(x,y) = x^2+2y^2+12xy+\lambda(4x^2+y^2 - 25)$

Tìm điểm dừng :

$$L'_x = 2x + 12y + 8\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L'_y = 4y + 12x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 + y^2 = 25 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta tính λ theo x và y , cho bằng nhau để tìm ra mối liên hệ giữa x và y

$$\lambda = -\frac{x + 6y}{4x} = -\frac{6x + 2y}{y} \Rightarrow 24x^2 + 7xy - 6y^2 = 0 \quad (4)$$

Pt (4) là pt đẳng cấp đối với x, y ; ta giải bằng cách đặt $y = tx$ để được phương trình

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$24x^2 + 7x.tx - 6(tx)^2 = 0 \iff -6t^2 + 7t + 24 = 0 \iff \begin{matrix} \hat{e}_t = -\frac{3}{2} \\ \hat{e}_t = \frac{8}{3} \end{matrix}$$

Suy ra $\begin{matrix} \hat{e}_y = -\frac{3}{2}x \\ \hat{e}_y = \frac{8}{3}x \end{matrix}$ Ta thay vào pt (3), rồi tính λ tương ứng để được 4 điểm dừng

$M_1(2, -3)$ và $M_2(-2, 3)$ với $\lambda = 2$,

$M_3(\frac{3}{2}, 4)$ và $M_4(-\frac{3}{2}, -4)$ với $\lambda = -\frac{17}{4}$

Tính $d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + 2L''_{xy}dxdy$

$$d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (4+2\lambda)dy^2 + 24dxdy$$

Ta sẽ xét tại 2 điểm dừng một lần vì cùng chung λ

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Tại M_1 và M_2 : $d^2L=18dx^2+24dxdy+8dy^2 = 2(3dx+2dy)^2$

Đến đây, ta chưa thể kết luận về dấu của d^2f nên ta sẽ sử dụng điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ bằng cách **lấy vi phân 2 vế**: $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$ và thay giá trị x, y tại điểm đang xét để tìm thêm mối liên hệ giữa dx và dy

Từ : $4x^2+y^2 = 25 \implies 8xdx+2ydy = 0$

Thay $x=2$ và $y=-3$ (điểm M_1) hoặc $x=-2$ và $y=3$ (điểm M_2) vào trên ta được : $8dx = 3dy$

Suy ra: $d^2L(M_1) = d^2L(M_2) = (225/4)dx^2$ - xác định dương

Tương tự khi xét dấu d^2L tại M_3 và M_4 .

Vậy : $f_{ct} = f(2, -3) = f(-2, 3) = -26,$

$f_{cđ} = f(3/2, 4) = f(-3/2, -4) = -151/4$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ : Dùng cực trị để tìm khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng :
 $x+y = 6, y+z = 12$

Giải

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm $M(x,y,z)$ bất kỳ là

$$d(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tức là ta có bài toán: Tìm cực trị hàm $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ với 2 điều kiện $x+y = 6$ và $y+z = 12$

Ta sẽ làm bằng 2 cách :

Cách 1: Thay $x = 6-y, z = 12-y$ vào hàm f để được hàm 1 biến y và tìm cực trị

7 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Cách 2: Dùng hàm Lagrange với 2 điều kiện

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$$

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x+y-6) + \mu(y+z-12)$$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hpt

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$L'_z = 0$$

$$\varphi(x,y,z) = 0$$

$$\psi(x,y,z) = 0$$

$$L'_x = 2x + \lambda = 0$$

$$L'_y = 2y + \lambda + \mu = 0$$

$$\hat{U} \quad L'_z = 2z + \mu = 0$$

$$x + y = 6$$

$$y + z = 12$$

Ta được 1
điểm
dừng
 $M(0,6,6)$
với $\lambda = 0$,
 $\mu = -12$

Tính $d^2L = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ xác định dương tại mọi điểm nên ta được $f_{ct} = f(0,6,6) = 72$. Vậy khoảng cách cần tìm là $6\sqrt{2}$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Định nghĩa: Cho hàm $f(x,y)$ xác định trong miền D đóng và bị chặn. Hàm f được gọi là đạt **giá trị lớn nhất (GTLN)** tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ nếu

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in D \text{ và } f_{\max} = f(x_0, y_0)$$

Thay **dấu \leq bởi dấu \geq** trong định nghĩa trên ta có khái niệm **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm trên miền đóng D

Định lý Weierstrass : Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên tập đóng và bị chặn D thì f đạt GTLN, GTNN trên D

Nhắc lại rằng: Tập D đóng tức là D chứa biên của nó, và D bị chặn tức là tồn tại 1 hình cầu mở $B(M_0, r)$ sao cho $D \subset B(M_0, r)$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Như vậy, để tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x,y)$ trên miền đóng D ta làm như sau :

1. Tìm các điểm dừng M_1, M_2, \dots và là các điểm trong của D . Tính giá trị của hàm tại các điểm dừng đó
2. Tìm các điểm dừng trên biên của D tức là điểm dừng của hàm f thỏa điều kiện là phương trình biên D . Tính giá trị hàm f tại các điểm dừng đó.
3. So sánh giá trị của hàm f tại các điểm dừng trong và trên biên của D để tìm ra GTLN, GTNN của hàm f trên miền D .

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = (x-6)^2 + (y+8)^2$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 \leq 25$

Giải:

Miền D là hình tròn, bao gồm cả đường tròn tâm

$O(0,0)$ bán kính $r = 5$

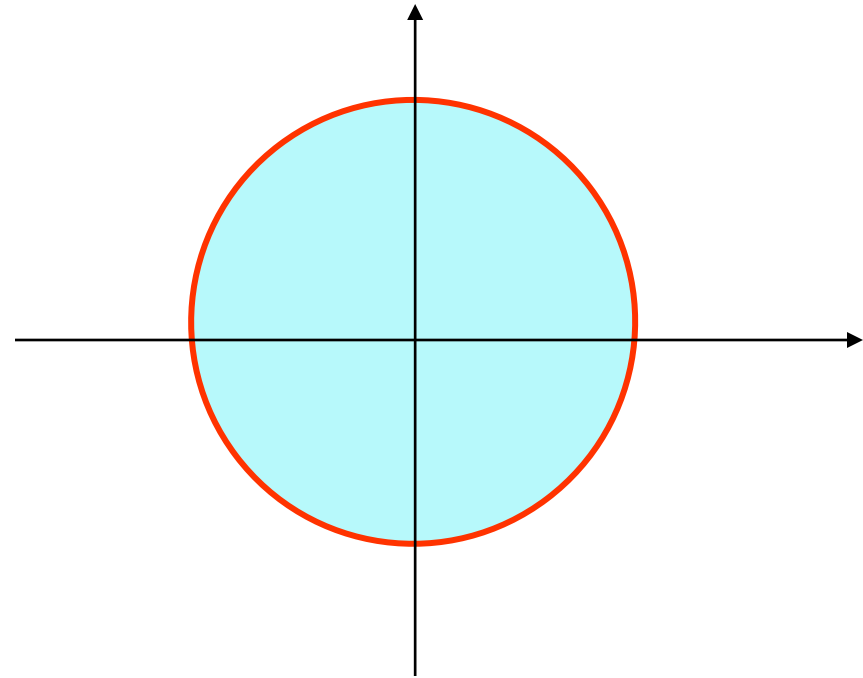
Tìm điểm dừng trong

hình tròn tức là giải hpt

$$\begin{cases} f'_x = 2(x - 6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_y = 2(y + 8) = 0 \end{cases}$$

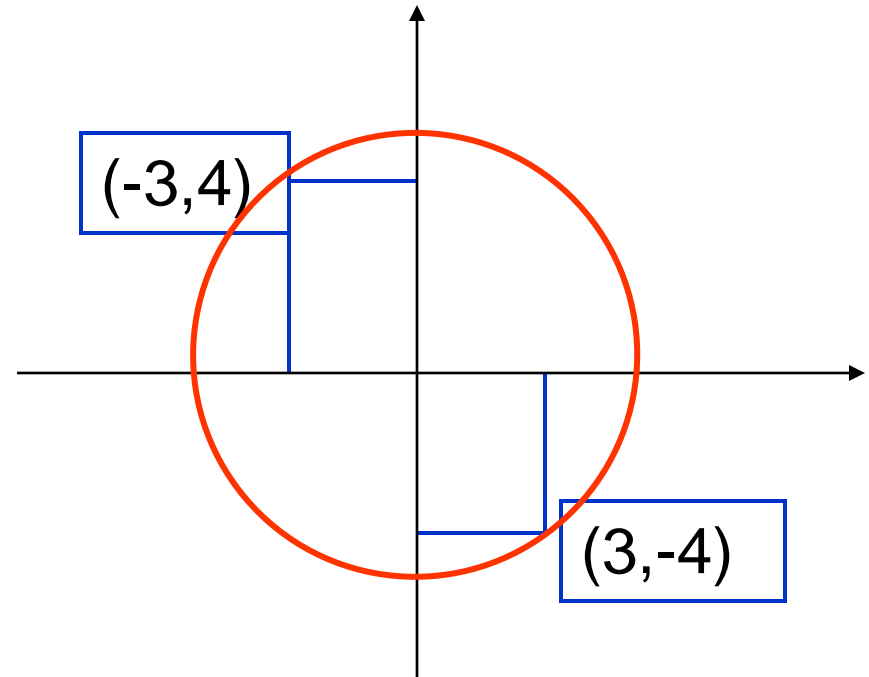
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$



2 pt trên cho ta nghiệm $x = 6, y = -8$, không thỏa bất đẳng thức tức là trong D không có điểm dừng

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Tìm điểm dừng trên biên D tức là tìm điểm dừng có điều kiện bằng cách lập hàm Lagrange



$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-25)$$

và giải hpt

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-6) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(y+8) + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ta được 2 điểm dừng trên} \\ \text{biên } M_1(-3,4), M_2(3,-4) \end{array}$$

Ta tính giá trị của f tại 2 điểm dừng trên và so sánh ta được $f_{max} = f(-3,4) = 225$, $f_{min} = f(3,-4) = 25$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ: Tìm GTLN GTNN của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ trong miền $|x| + |y| \leq 1$

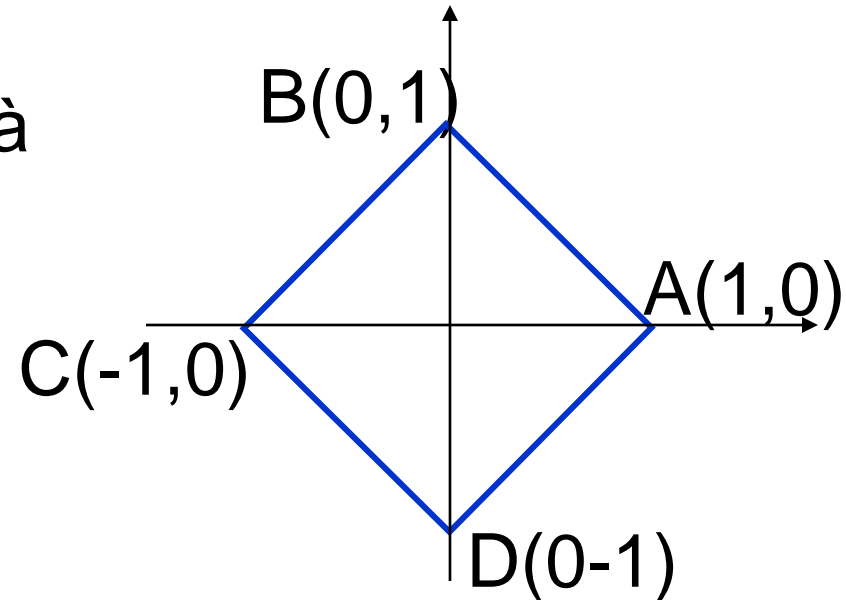
Giải:

Trước hết, ta xác định miền D là hình vuông ABCD như hình vẽ
Tìm điểm dừng trong hình vuông bằng cách giải hpt

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = 2y - x = 0 \end{cases}$$

Ta được điểm dừng $M_1(0,0)$

Tìm điểm dừng trên biên tức là lần lượt trên 4 cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông



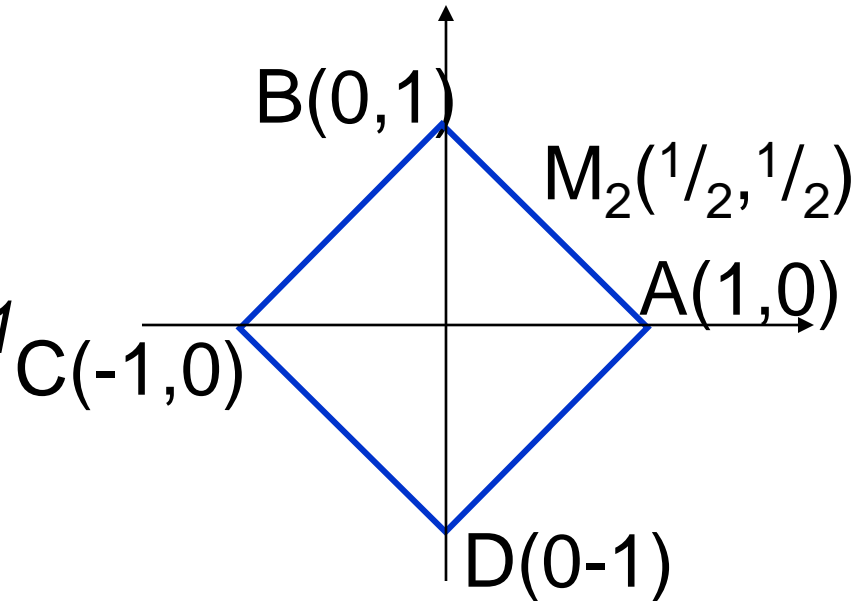
7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Trên cạnh AB với phương trình $x+y = 1 \leftrightarrow y = 1-x$

Thay vào hàm f ta được

$$f = x^2 + (1-x)^2 - x(1-x) = 3x^2 - 3x + 1$$

$f' = 6x - 3 = 0 \leftrightarrow x = 1/2$ ta được điểm dừng $M_2(1/2, 1/2)$



Tương tự trên 3 cạnh còn lại ta được 3 điểm dừng lần lượt là $M_3(-1/2, 1/2)$, $M_4(-1/2, -1/2)$, $M_5(1/2, -1/2)$

Cuối cùng, ta tính giá trị của hàm tại 5 điểm dừng vừa tìm: $f(M_1) = 0$, $f(M_2) = f(M_4) = 1/4$, $f(M_3) = f(M_5) = 3/4$

Và tại 4 điểm đặc biệt: $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 1$

Vậy: $f_{\max} = f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 1$, $f_{\min} = f(M_1) = 0$

7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ : Tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ trên miền

$$D : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 5 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$$

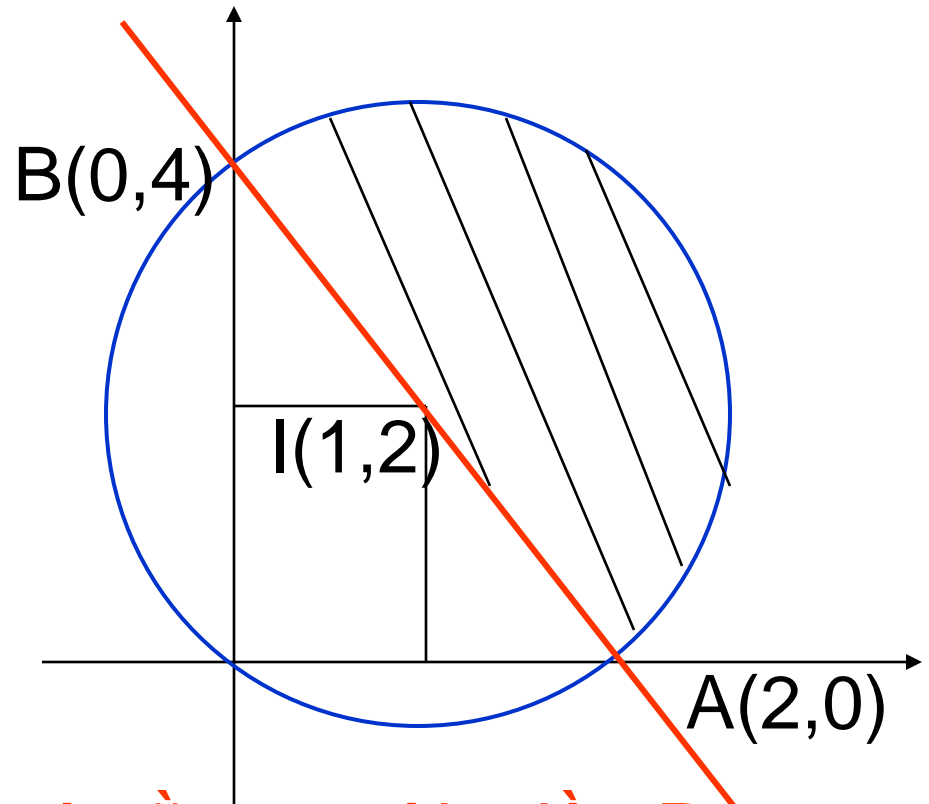
Giải:

Trước tiên, ta xác định miền D là phần hình tròn nằm trên đường thẳng

1. Tìm điểm dừng trong miền D :

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ta không nhận điểm này vì nó nằm ngoài miền D



7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

2. Tìm điểm dừng trên biên của D gồm 2 đường :
đoạn thẳng AB và nửa trên đường tròn ACB .

Trên đoạn thẳng, ta có điều kiện: $2x+y = 4 \leftrightarrow y = -2x+4$, $0 \leq x \leq 2$

thay vào hàm f ta được

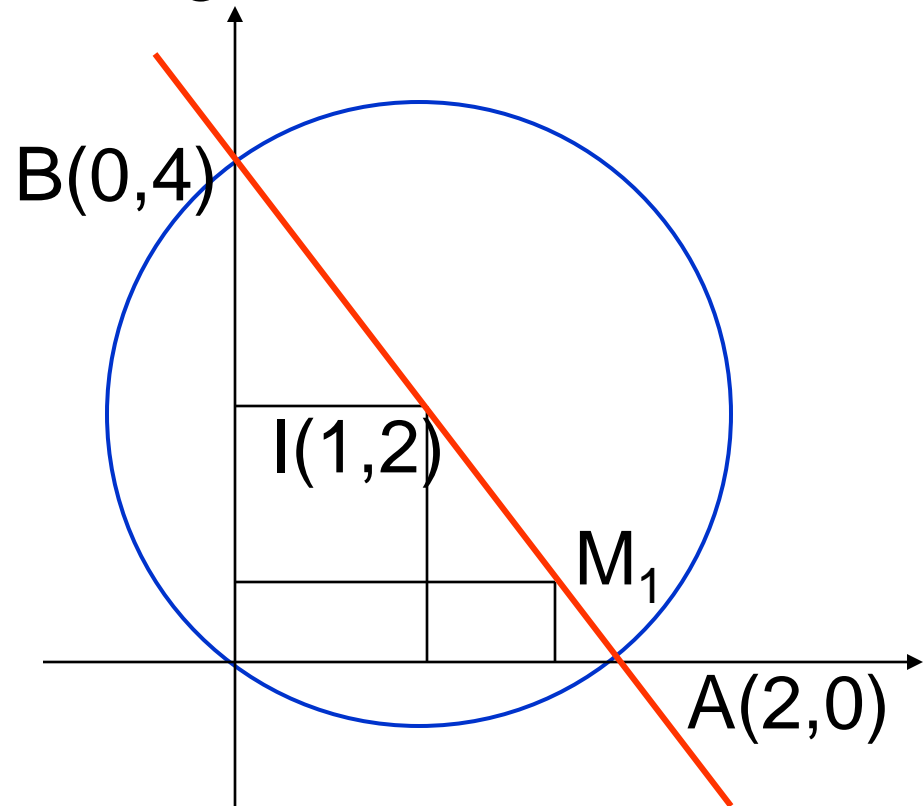
$$f = x^2 + (2x-4)^2 = 5x^2 - 16x + 16$$

Cho ta 1 điểm dừng

$$M_1\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Trên nửa đường tròn, ta lập hàm Lagrange

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 5)$$



7 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda(y-2) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0, \lambda = 0 \\ x = 2, y = 4, \lambda = -2 \end{cases}$$

Ta loại điểm $(0,0)$ vì nằm dưới đường thẳng và nhận điểm $M_2(2,4)$

Cuối cùng, ta tính giá trị f tại 2 điểm đặc biệt và tại 2 điểm dừng

$$f(M_1) = \frac{80}{25}, f(M_2) = 20, \\ f(A) = 4, f(B) = 16$$

và so sánh để được

$$f_{\max} = f(2,4) = 20, f_{\min} = f\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{80}{25}$$

