

Chương 1:

**ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN
HÀM NHIỀU BIẾN**

Phần 1

Nội dung

1. Đạo hàm riêng cấp 1 của $z = f(x,y)$
2. Đạo hàm riêng cấp cao của $z = f(x,y)$
3. Sự khả vi và vi phân.

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

Đạo hàm riêng cấp 1 của $f(x, y)$ theo biến x tại (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

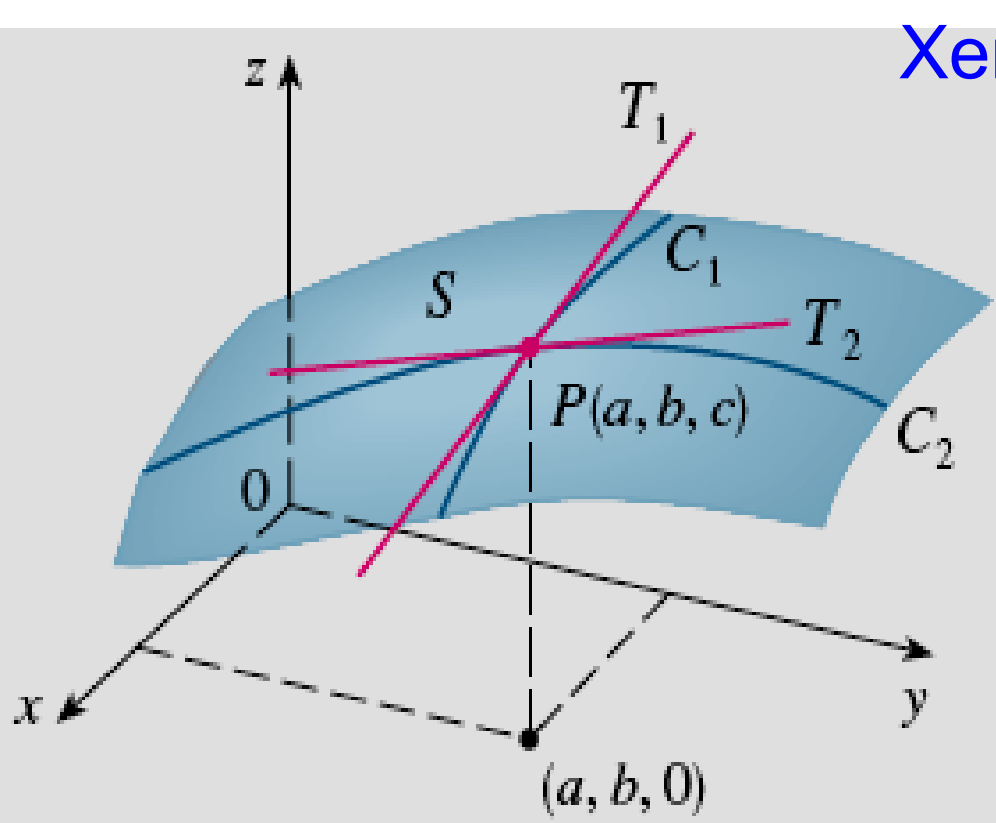
(Cố định y_0 , biểu thức là hàm 1 biến theo x , tính đạo hàm của hàm này tại x_0)

Đạo hàm riêng cấp 1 của f theo biến y tại (x_0, y_0)

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ý nghĩa của đhr cấp 1

Cho mặt cong $S: z = f(x, y)$, xét $f'_x(a, b)$, với $c = f(a, b)$



Xem phần mặt cong S gần $P(a, b, c)$

Mphẳng $y = b$ cắt S theo gt C_1 đi qua P .

$$(C_1) : z = g(x) = f(x, b)$$

$$g'(a) = f'_x(a, b)$$

$f'_x(a, b) = g'(a)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $x = a$.

$f'_y(a, b)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_2 của C_2 (là phần giao của S với mp $x = a$) tại $y = b$

Các ví dụ về cách tính.

$$1/ \text{ Cho } f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

$$\text{Tính } f'_x(1, 2), f'_y(1, 2)$$

$f'_x(1, 2)$: cố định $y_0 = 2$, ta có hàm 1 biến

$$f(x, 2) = 6x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'_x(1, 2) = (6x^2 + 4x)' \Big|_{x=1} = 12x + 4 \Big|_{x=1} = 16$$

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

$$f'_y(1,2)$$

cố định $x_0 = 1$, ta có hàm 1 biến

$$f(1,y) = 3y + y^2$$

$$\Rightarrow f'_y(1,2) = (3y + y^2)' \Big|_{y=2} = (3 + 2y) \Big|_{y=2} = 7$$

$$2/ \quad f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

Tính $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}_2$

$f'_x(x,y)$ Xem y là hằng, tính đạo hàm $f(x,y)$ theo x

$$f'_x(x,y) = 6xy + y^2, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính: $f'_x(1,2) = (6xy + y^2) |_{x=1,y=2} = 16$

(Đây là cách thường dùng để tính đạo hàm tại 1 điểm)

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

$f'_y(x, y)$ Xem x là hằng, tính đạo hàm $f(x, y)$ theo y

$$f'_y(x, y) = 3x^2 + x2y, \forall (x, y)$$

Áp dụng tính:

$$f'_x(1, 2) = (3x^2 + 2xy) |_{x=1, y=2} = 7$$

2/ Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ với $f(x, y) = x^y$

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = 1 \times 1^{1-1} = 1;$$

$$f'_y(x, y) = x^y \ln x, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_y(1,1) = 1^1 \ln 1 = 0$$

3/ Cho $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a/ Tính $f'_x(0, 1)$

b/ Tính $f'_x(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0, 1)$ $(0, 1)$ không phải là điểm phân chia biểu thức.

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow f'_x(0, 1) = 1$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b/ Tính $f'_x(0, 0)$ $(0, 0)$ là điểm phân chia biểu thức
 \Rightarrow Tính bằng định nghĩa

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$4/ \text{ Cho } f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{tính } f'_x(x, y)$$

Hàm f xác định tại, mọi (x, y)

$$f'_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Công thức trên không đúng cho $(x, y) = (0, 0)$

$$f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$\frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{e^{-\sqrt{\Delta x^2}} - 1}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{e^{-\sqrt{\Delta x^2}} - 1}{\Delta x} = \mp 1$$

f không có đạo hàm theo x tại (0, 0)

($f'_x(0,0)$ không tồn tại).

Ví dụ cho hàm 3 biến (Tương tự hàm 2 biến)

Cho $f(x, y, z) = x + ye^{xz}$

Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0, -1, 2)$

$$f'_x = 1 + yze^{xz} \Rightarrow f'_x(0, -1, 2) = 1 - 2 = -1$$

$$f'_y = e^{xz}$$

$$f'_z = xye^{xz}$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

Xét hàm 2 biến $f(x,y)$

f'_x, f'_y cũng là các hàm 2 biến

Đạo hàm riêng cấp 2 của f là các đhr cấp 1 (nếu có) của f'_x, f'_y

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f''_{yy} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

VÍ DỤ

$$f(x, y) = x^2 + xy + \cos(y - x)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của f

$$f'_x = 2x + y + \sin(y - x) \quad f'_y = x - \sin(y - x)$$

$$f''_{xx} = f'_x \quad ' \quad _x = 2x + y + \sin(y - x) \quad ' \quad _x$$

$$= 2 - \cos(y - x)$$

$$f''_{xy} = f'_x \quad ' \quad _y = 1 + \cos(y - x)$$

$$f'_y = x - \sin(y - x)$$

$$f''_{yx} = f'_{yx} = 1 + \cos(y - x)$$

$$f''_{yy} = f'_{yy} = -\cos(y - x)$$

$$f''_{yx}(0, \pi) = 0, \quad f''_{yy}(0, \pi) = 1$$

$$f''_{xx}(0, \pi) = 3, \quad f''_{xy}(0, \pi) = 0$$

Tổng quát thì các đạo hàm hỗn hợp không bằng nhau

$$f''_{xy} \neq f''_{yx}$$

Định lý Schwartz: nếu $f(x, y)$ và các đạo hàm riêng

$f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ liên tục trong miền mở chứa (x_0, y_0)

thì $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

(VD 2.28 trang 53, Toán 3, Đỗ Công Khanh)

Đối với các hàm sơ cấp thường gặp, định lý Schwartz luôn đúng tại các điểm đạo hàm tồn tại.

Định lý Schwartz cũng đúng cho đạo hàm cấp 3 trở lên.

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$$

Cách viết đạo hàm cấp cao và cách tính:

$$f_{x^m y^n}^{(m+n)} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right)$$

Lưu ý: đối với các hàm sơ cấp tính theo thứ tự nào cũng được.

Ví dụ

1/ Cho $f(x, y) = e^{xy}$ tính $f''_{xx}, f'''_{xyy},$

$$f'_x(x, y) = ye^{xy} \quad f''_{xx} = y^2 e^{xy}$$

$$f''_{xy}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$$

$$f'''_{xyy}(x, y) = x + (1 + xy)x e^{xy} = (2x + x^2 y)e^{xy}$$

Cách 2: $f(x, y) = e^{xy}$

$$f'_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = 2x + x^2 y e^{xy}$$

Lấy theo thứ tự này nhanh hơn cách trước.

$$2/ \text{ Cho } f(x, y) = \ln(2x + 3y) \quad \text{Tính } \frac{\partial^{10} f}{\partial x^7 \partial y^3}(-1, 1)$$

Đạo hàm f: 7 lần theo x, 3 lần theo y

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x, y) = \frac{(-1)^{7-1} (7-1)! 2^7}{(2x + 3y)^7} = \frac{2^7 6!}{(2x + 3y)^7}$$

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^7 \partial y^3}(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x, y) \right)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \mathbf{y}^3} \left(\frac{\partial^7 f}{\partial \mathbf{x}^7} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) = \frac{\partial^3}{\partial \mathbf{y}^3} \left(\frac{2^7 6!}{(2\mathbf{x} + 3\mathbf{y})^7} \right)$$

$$= 2^7 6! 3^3 (-7)(-7-1)(-7-2)(2\mathbf{x} + 3\mathbf{y})^{-10}$$

$$= -2^7 \times 9! \times 3^3 \times (2\mathbf{x} + 3\mathbf{y})^{-10}$$

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial \mathbf{x}^7 \partial \mathbf{y}^3} (-1, 1) = -2^7 \times 9! \times 3^3$$

SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN (CẤP 1)

f khả vi tại (x_0, y_0) nếu tồn tại 2 hằng số A, B sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

$o(\rho) = o\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ là VCB bậc cao hơn ρ khi $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

vi phân của f tại (x_0, y_0)

Điều kiện cần của sự khả vi:

1. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0) .

2. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0)

và

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B$$

Vi phân của hàm 2 biến thường viết dạng:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Điều kiện đủ của khả vi:

Cho f xác định trong miền mở chứa (x_0, y_0) , nếu các đhr f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0) .

Các hàm sơ cấp thường gặp đều thỏa mãn điều kiện này.

VD: cho $f(x, y) = x^2 y^3$ tính $df(x, y)$

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$= 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$$

Các công thức tính vi phân: như hàm 1 biến

$$d(\alpha f) = \alpha df, \quad \alpha \in R$$

$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$

$$d(f.g) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Sau đó gom lại theo dx, dy

Vi phân hàm n biến: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$dz = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_n} dx_n$$

VI PHÂN CẤP CAO

Vi phân cấp 2 của f là vi phân của $df(x,y)$ khi xem dx, dy là các hằng số. (ta chỉ xét trường hợp các đhr hỗn hợp bằng nhau)

Cách viết: $d^2f(x, y) = d(df(x, y))$

$$d^2 f = d f'_x dx + f'_y dy = d(f'_x) dx + d(f'_y) dy$$

$$= (f''_{xx} dx + f''_{xy} dy) dx + (f''_{yx} dx + f''_{yy} dy) dy$$

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

hay

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Công thức trên áp dụng khi x, y là các biến độc lập .

VÍ DỤ

Tìm vi phân cấp 1, 2 tại $(0, 1)$ của

$$f(x, y) = x^2 y^2 - y^3 e^x$$

$$* f'_x = 2xy^2 - y^3 e^x, f'_y = 2x^2 y - 3y^2 e^x$$

$$df(0,1) = f'_x(0,1)dx + f'_y(0,1)dy = -dx - 3dy$$

$$* f''_{xx} = 2y^2 - y^3 e^x, f''_{xy} = 4xy - 3y^2 e^x$$

$$f''_{yy} = 2x^2 - 6ye^x$$

$$* \quad f''_{xx} = 2y^2 - y^3 e^x, f''_{xy} = 4xy - 3y^2 e^x, f''_{yy} = 2x^2 - 6ye^x$$

$$\begin{aligned} d^2 f(0,1) &= f''_{xx}(0,1) dx^2 + 2f''_{xy}(0,1) dx dy + f''_{yy}(0,1) dy^2 \\ &= dx^2 + 2 \times (-3) dx dy - 6 dy^2 \end{aligned}$$

Công thức tổng quát cho vi phân cấp cao

$$d^n f = d(d^{n-1} f)$$

Vi phân cấp n là vi phân của vi phân cấp $(n - 1)$.

(Chỉ áp dụng khi f là biểu thức đơn giản theo x, y (thường là hợp của 1 hàm sơ cấp với 1 đa thức bậc 1 của x, y).

Công thức hình thức: (trường hợp biến độc lập)

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Trong khai triển nhị thức Newton, thay các lũy thừa của ∂ bởi cấp đh tương ứng của f , lũy thừa của dx, dy tính như thường.

cụ thể:

$$\begin{aligned}d^2 f(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^3 f(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\end{aligned}$$

Ví dụ

Tính vi phân cấp 3 của $z = f(x, y) = e^{x+y}$

Cách 1:

$$\begin{aligned} dz &= d(e^{x+y}) \\ &= e^{x+y} dx + e^{x+y} dy \\ &= e^{x+y} (dx + dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d(e^{x+y} (dx + dy)) \quad (dx, dy \text{ là hằng}) \\ &= d(e^{x+y}) (dx + dy) = e^{x+y} (dx + dy)^2 \end{aligned}$$

$$d^3 z = d(d^2 z) = d(e^{x+y} (dx + dy)^2) = e^{x+y} (dx + dy)^3$$

Cách 2: $f(x, y) = e^{x+y}$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

$$d^3 z = e^{x+y} dx^3 + 3 dx^2 dy + 3 dx dy^2 + dy^3$$

$$\Rightarrow d^3 z = e^{x+y} (dx + dy)^3$$