Chương 1

GIỚI THIỆU XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

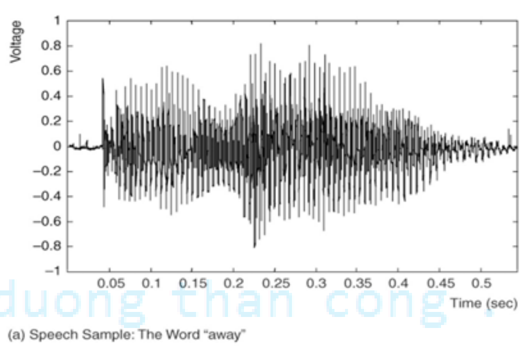
Chương này nêu tổng quát các vấn đề liên quan đến môn học. Nội dung chính chương này là:

- Giải thích các khái niệm như: "Tín hiệu", "Tín hiệu số", "Xử lý tín hiệu", "Xử lý tín hiệu số"...
- Các khâu cơ bản trong hệ thống xử lý tín hiệu số
- Nêu một số ứng dụng của xử lý tín hiệu số
- So sánh xử lý tương tự và xử lý số
- Giải thích khái niệm "Tần số"
- Các bước cơ bản chuyển đổi tín hiệu từ tương tự sang số
- Các bước có bản chuyển đổi tín hiệu từ số sang tương tự

1.1 TÍN HIỆU, HỆ THỐNG và XỬ LÝ TÍN HIỆU

Để hiểu "Xử lý tín hiệu" là gì, ta sẽ tìm hiểu ý nghĩa của từng từ. *Tín hiệu(signal)* dùng để chỉ một đại lượng vật lý mang tin tức. Về mặt toán học, ta có thể mô tả tín hiệu như là một hàm theo biến thời gian, không gian hay các biến độc lập khác. Chẳng hạn như, hàm: $x(t) = 20t^2$ mô tả tín hiệu biến thiên theo biến thời gian t. Hay một ví dụ khác, hàm: $s(x, y) = 3x + 5xy + y^2$ mô tả tín hiệu là hàm theo hai biến độc lập x và y, trong đó x và y biểu diễn cho hai tọa độ không gian trong mặt phẳng.

Hai tín hiệu trong ví dụ trên thuộc về lớp tín hiệu có thể được biểu diễn chính xác bằng hàm theo biến độc lập. Tuy nhiên, trong thực tế, các mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý và các biến độc lập thường rất phức tạp nên không thể biểu diễn tín hiệu như trong hai ví dụ vừa nêu trên.



Hình 1.1 *Ví dụ tín hiệu tiếng nói*

Lấy ví dụ tín hiệu tiếng nói- đó là sự biến thiên của áp suất không khí theo thời gian. Chẳng hạn khi ta phát âm từ "away", dạng sóng của từ đó được biểu diễn trên hình 1.1.

Một ví dụ khác là tín hiệu điện tâm đồ (ECG)- cung cấp cho bác sĩ những tin tức về tình trạng tim của bệnh nhân, hay là tín hiệu điện não đồ (EEG) cung cấp tin tức về hoạt động của não.

Các tín hiệu tiếng nói, ECG, EEG là các ví dụ về tín hiệu mang tin có thể biểu diễn là hàm theo biến thời gian. Thực tế có những tín hiệu là hàm theo nhiều biến độc lập. Ví dụ như tín hiệu ảnh (image)- là sự thay đổi của cường độ ánh sáng theo không gian, có thể xem là hàm độ sáng theo hai biến không gian.

Tất cả các tín hiệu đều do một nguồn nào đó tạo ra, theo một cách thức nào đó. Ví dụ tín hiệu tiếng nói được tạo ra bằng cách ép không khí đi qua dây thanh âm. Một bức ảnh có được bằng cách phơi sáng một tấm phim chụp một cảnh/ đối tượng nào đó. Quá trình tạo ra tín hiệu như vậy thường liên quan đến một hệ thống, hệ thống này đáp ứng lại một kích thích nào đó. Trong tín hiệu tiếng nói, hệ thống là hệ thống phát âm, gồm môi, răng, lưỡi, dây thanh... Kích thích liên quan đến hệ thống được gọi là *nguồn tín hiệu (signal source).* Như vậy ta có nguồn tiếng nói, nguồn ảnh và các nguồn tín hiệu khác.

Có thể định nghĩa *hệ thống (system)* là một thiết bị vật lý thực hiện một tác động nào đó lên tín hiệu. Ví dụ, bộ lọc dùng để giảm nhiễu trong tín hiệu mang tin được gọi là một hệ thống.

Khi ta truyền tín hiệu qua một hệ thống, như bộ lọc chẳng hạn, ta nói rằng ta đã xử lý tín hiệu đó. Trong trường hợp này, xử lý tín hiệu liên quan đến lọc nhiễu ra khỏi tín hiệu mong muốn. Như vậy, *xử lý tín hiệu (signal processing)* là ý muốn nói đến một loạt các công việc hay các phép toán được thực hiện trên tín hiệu nhằm đạt một mục đích nào đó, như là tách lấy tin tức chứa bên trong tín hiệu hoặc là truyền tín hiệu mang tin từ nơi này đến nơi khác.

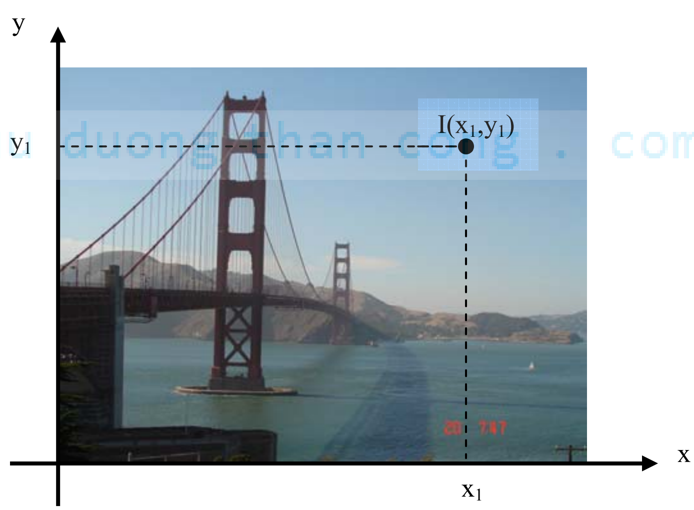
Ở đây ta cần lưu ý đến định nghĩa hệ thống, đó không chỉ đơn thuần là thiết bị vật lý mà còn là các phần mềm xử lý tín hiệu hoặc là sự kết hợp giữa phần cứng và phần mềm.Ví dụ khi xử lý số tín hiệu bằng các mạch logic, hệ thống xử lý ở đây là phần cứng. Khi xử lý bằng máy tính số, tác động lên tín hiệu bao gồm một loạt các phép toán thực hiện bởi chương trình phần mềm. Khi xử lý bằng các bộ vi xử lý- hệ thống bao gồm kết hợp cả phần cứng và phần mềm, mỗi phần thực hiện các công việc riêng nào đó.

1.2 PHÂN LOẠI TÍN HIỆU

Các phương pháp ta sử dụng trong xử lý tín hiệu phụ thuộc chặt chẽ vào đặc điểm của tín hiệu. Có những phương pháp riêng áp dụng cho một số loại tín hiệu nào đó. Do vậy, trước tiên ta cần xem qua cách phân loại tín hiệu liên quan đến những ứng dụng cụ thể.

1.2.1 Tín hiệu nhiều hướng và tín hiệu nhiều kênh

Như đã nói trong mục 1.1, tín hiệu có thể được mô tả là hàm theo một hoặc nhiều biến độc lập. Nếu tín hiệu là hàm theo một biến, ta gọi đó là các *tín hiệu một hướng (one-dimention signal),* như tín hiệu tiếng nói, ECG, EEG. Ngược lại ta gọi là *tín hiệu nhiều hướng (multi-dimention signal)*, ví dụ như tín hiệu ảnh trắng đen, mỗi điểm ảnh là hàm theo 2 biến độc lập.



Hình 1.2 *Ví dụ tín hiệu ảnh màu (2 hướng- 3 kênh)*

Trong một số ứng dụng, tín hiệu được tạo ra không phải từ một mà là nhiều nguồn hay nhiều bộ cảm biến. Các tín hiệu như vậy được gọi là *tín hiệu đa kênh (multi-channel signal).* Bức ảnh trên hình 1.2 là một ví dụ về tín hiệu 2 hướng, 3 kênh. Ta thấy độ sáng I(x,y) ở mỗi một điểm là hàm theo 2 biến không gian độc lập, độ sáng này lại phụ thuộc vào độ sáng của 3 màu cơ bản red, green và blue. Một ví dụ khác, tín hiệu ảnh TV màu là tín hiệu 3 hướng- 3 kênh, có thể biểu diễn bởi vector sau :

$$I(x,y,t)=\begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix}$$

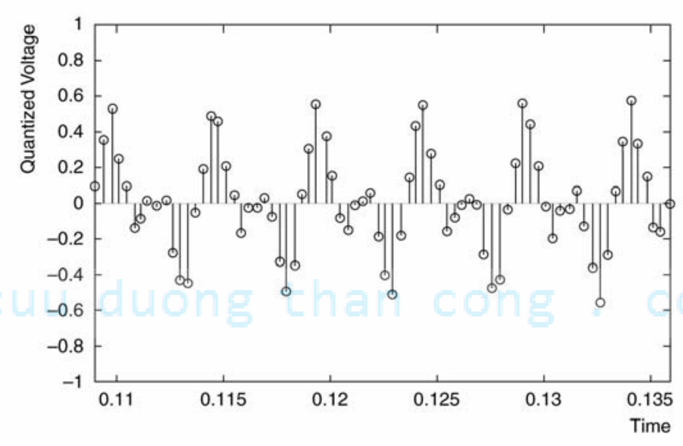
Trong giáo trình này, ta tập trung xét tín hiệu một hướng- một kênh, biến là biến thời gian (mặc dù thực tế không phải lúc nào biến cũng là biến thời gian)

1.2.2 Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

Tín hiệu liên tục (continuous-time signal) hay còn gọi là tín hiệu tương tự là tín hiệu được xác định tại tất cả các giá trị thời gian. Về mặt toán học, có thể mô tả tín hiệu này là hàm của một biến liên tục, ví dụ tín hiệu tiếng nói.

Tín hiệu rời rạc (discrete-time signal) chỉ được xác định tại một số thời điểm nào đó. Khoảng cách giữa các thời điểm này không nhất thiết phải bằng nhau, nhưng trong thực tế thường là lấy bằng nhau để dễ tính toán. Có thể tạo ra tín hiệu rời rạc từ tín hiệu liên tục bằng 2 cách. Một là lấy mẫu tín hiệu liên tục, hai là đo hay đếm một đại lượng vật lý nào đó theo một chu kỳ nhất định, ví dụ cân em bé hàng tháng, đo áp suất không khí theo giờ...

Tín hiệu $x(t_n)=e^{-|t_n|}, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ là một ví dụ về tín hiệu rời rạc. Ta có thể dùng biến nguyên n thay cho biến thời gian rời rạc t_n. Lúc này, tín hiệu trở thành một hàm theo biến nguyên, về mặt toán ta có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc là một dãy số (thực hoặc phức). Ta sử dụng ký hiệu x(n) thay cho $x(t_n)$, nghĩa là t_n = nT với T là hằng số- khoảng cách giữa hai thời điểm rời rạc cạnh nhau. Hình 1.3 là một ví dụ về tín hiệu tiếng nói rời rạc.



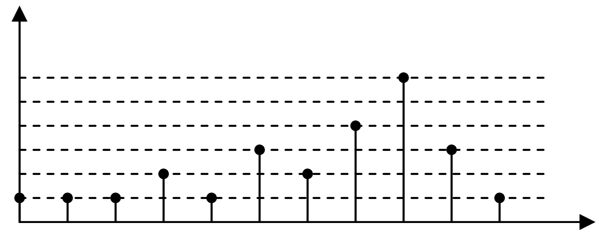
***Hình 1.3** Ví dụ tín hiệu rời rạc*

1.2.3 Tín hiệu biên độ liên tục và tín hiệu biên độ rời rạc

Biên độ của cả tín hiệu liên tục và rời rạc đều có thể liên tục hay rời rạc.

Nếu tín hiệu có tất cả các giá trị trong một dải biên độ nào đó thì ta gọi đó là *tín hiệu biên độ liên tục (continuous-valued signal)*. Ngược lại, nếu tín hiệu chỉ lấy một số giá trị nào đó (còn gọi là mức) trong một dải biên độ thì đó là *tín hiệu biên độ rời rạc (discrete-valued signal).*

Khoảng cách giữa các mức biên độ này có thể bằng nhau hay không bằng nhau. Thường thì ta biểu diễn các mức biên độ này bằng một số nguyên, đó là bội số của khoảng cách giữa hai mức biên độ cạnh nhau. Tín hiệu rời rạc theo cả thời gian và biên độ được gọi là *tín hiệu số (digital signal).* Hình 1.4 là một ví dụ về tín hiệu số.



Hình 1.4 *Ví dụ tín hiệu số với 6 mức biên độ khác nhau*

Để xử lý tín hiệu, trước hết phải thu lấy được tín hiệu. Ví dụ ta thu lấy tín hiệu âm thanh bằng microphone, chuyển đổi tín hiệu âm thanh sang tín hiệu điện. Hay như tín hiệu ảnh, ta có thể thu lấy bằng máy ảnh. Trong máy ảnh tương tự chẳng hạn, tín hiệu ánh sáng điều khiển các phản ứng hóa học trên một tấm phim ảnh. Về bản chất, các tín hiệu tự nhiên đều là tương tự, có số mức biên độ và số thời điểm đều là vô hạn. Do vậy, tín hiệu tương tự không phù hợp để xử lý bằng các hệ thống số. Để xử lý số, tín hiệu tương tự được lấy mẫu vào các thời điểm rời rạc, tạo thành tín hiệu rời rạc, sau đó lượng tử hóa biên độ của nó thành một tập các mức biên độ rời rạc. Quá trình *lượng tử hóa (quantization)* tín hiệu, về cơ bản là một quá trình xấp xỉ hóa. Nó có thể được thực hiện dễ dàng bằng cách làm tròn hay cắt gọt. Ví dụ tín hiệu có giá trị là 8.62 có thể được xấp xỉ hóa thành 8 (nếu lượng tử hóa bằng cách cắt gọt) hay là 9 (nếu lượng tử hóa bằng cách làm tròn)

1.2.4 Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên

Quá trình phân tích toán học và xử lý tín hiệu yêu cầu phải mô tả được tín hiệu. Sự mô tả này liên quan đến một mô hình tín hiệu. Dựa vào mô hình tín hiệu, ta có một cách phân loại tín hiệu khác.

Các tín hiệu có thể được mô tả duy nhất bằng một biểu diễn toán học rõ ràng như là đồ thị, bảng dữ liệu... được gọi là *tín hiệu xác định (deterministic signal).* Từ "xác định" ý muốn nhấn mạnh là ta biết rõ và chắc chắn các giá trị của tín hiệu trong quá khứ, hiện tại và tương lai.

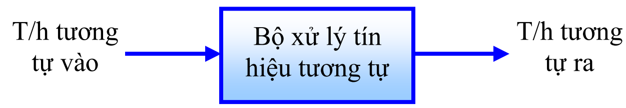
Tuy nhiên trong nhiều ứng dụng thực tế, có những tín hiệu không thể biểu diễn chính xác bằng các công thức toán học hay những mô tả toán như vậy là quá phức tạp. Ta không thể đoán trước sự biến thiên của các giá trị của loại tín hiệu này. Ta gọi đây là *tín hiệu ngẫu nhiên (random signal).* Ví dụ tín hiệu nhiễu là tín hiệu ngẫu nhiên.

Ta cần lưu ý rằng việc phân loại tín hiệu thực thành xác định hay ngẫu nhiên không phải lúc nào cũng rõ ràng. Đôi khi, xem tín hiệu là xác định hay ngẫu nhiên đều dẫn đến những kết quả có ý nghĩa. Nhưng đôi khi, việc phân loại sai sẽ dẫn đến kết quả bị lỗi, bởi vì có những công cụ toán chỉ có thể áp dụng cho tín hiệu xác định, trong khi các công cụ khác lại chỉ áp dụng cho tín hiệu ngẫu nhiên. Điều này sẽ trở nên rõ ràng hơn khi ta kiểm tra các công cụ toán cụ thể.

1.3 HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU

1.3.1 Các khâu cơ bản trong một hệ thống xử lý số tín hiệu

Như đã nói trên, hầu hết các tín hiệu bắt gặp trong khoa học và kỹ thuật đều là tương tự. Có thể xử lý trực tiếp các tín hiệu đó bằng một hệ thống tương tự thích hợp. Trong trường hợp này, ta nói tín hiệu được xử lý trực tiếp ở dạng tương tự, như minh họa trên hình 1.5. Cả tín hiệu vào và ra đều là tín hiệu tương tự.



Hình 1.5 *Xử lý tín hiệu tương tự*

Xử lý số là một phương pháp khác để xử lý tín hiệu tương tự, như minh họa trên hình 1.6. Tín hiệu tương tự phải được chuyển đổi thành dạng số (A/D) trước khi xử lý. Điều không may là quá trình chuyển đổi tương tự/ số này không bao giờ hoàn hảo, nghĩa là tín hiệu số không phải là biểu diễn chính xác cho tín hiệu tương tự ban đầu. Khi tín hiệu tương tự được chuyển thành tín hiệu số gần đúng nhất, quá trình xử lý sẽ được thực hiện bằng một *bộ xử lý tín hiệu số DSP (Digital Signal Processor),* tạo ra một tín hiệu số mới. Trong hầu hết các ứng dụng, tín hiệu số cần được chuyển đổi ngược lại thành tín hiệu tương tự (D/A) ở cuối quá trình xử lý. Tuy nhiên, cũng có những ứng dụng liên quan đến phân tích tín hiệu, trong đó không cần chuyển đổi D/A. Hình 1.6 là sơ đồ khối một hệ thống xử lý tín hiệu bằng phương pháp số. Bộ xử lý tín hiệu số DSP có thể là một mạch logic, một máy tính số hoặc là một bộ vi xử lý lập trình được.

Hình 1.6 *Xử lý số tín hiệu*

1.3.2 Ưu điểm của xử lý số so với xử lý tương tự

Có nhiều nguyên nhân khác nhau khiến cho xử lý số được ưa chuộng hơn là xử lý trực tiếp tín hiệu tương tự. Trước tiên, hệ thống số có thể lập trình được, tạo ta tính mềm dẻo trong việc cấu hình lại các hoạt động xử lý bằng cách đơn giản là thay đổi chương trình, trong khi đó để cấu hình lại hệ tương tự, ta phải thiết kế lại phần cứng, rồi kiểm tra và thẩm định xem các hoạt động đó có đúng không.

Độ chính xác cũng đóng một vai trò qua trọng trong việc lựa chọn bộ xử lý tín hiệu. Độ sai lệch của các linh kiện tương tự khiến cho các nhà thiết kế hệ thống vô cùng khó khăn trong việc điều khiển độ chính xác của hệ thống tương tự. Trong khi đó, việc điều khiển độ chính xác của hệ thống số lại rất dễ dàng, chỉ cần ta xác định rõ yêu cầu về độ chính xác rồi quyết định lựa chọn các bộ chuyển đổi A/D và DSP có độ dài từ thích hợp, có kiểu định dạng dấu phẩy tĩnh hay dấu phẩy động.

Tín hiệu số dễ dàng lưu trữ trên các thiết bị băng đĩa từ mà không bị mất mát hay giảm chất lượng. Như vậy tín hiệu số có thể truyền đi xa và có thể được xử lý từ xa. Phương pháp xử lý số cũng cho phép thực hiện các thuật toán xử lý tín hiệu tinh vi phức tạp hơn nhiều so với xử lý tương tự, nhờ việc xử lý được thực hiện bằng phần mềm trên các máy tính số.

Trong một vài trường hợp, xử lý số rẻ hơn xử lý tương tự. Giá thành thấp hơn là do các phần cứng số rẻ hơn, hoặc là do tính mềm dẻo trong xử lý số.

Tuy nhiên, xử lý số cũng có một vài hạn chế. Trước tiên là sự hạn chế về tốc độ hoạt động của các bộ chuyển đổi A/D và bộ xử lý số DSP. Sau này ta sẽ thấy những tín hiệu băng thông cực lớn yêu cầu tốc độ lấy mẫu của bộ A/D cực nhanh và tốc độ xử lý của DSP cũng phải cực nhanh. Vì vậy, phương pháp xử lý số chưa áp dụng được cho các tín hiệu tương tự băng thông lớn.

Nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ máy tính và công nghệ sản xuất vi mạch mà lĩnh vực xử lý tín hiệu số (DSP) phát triển rất mạnh trong vài thập niên gần đây. Ứng dụng của DSP ngày càng nhiều trong khoa học và công nghệ. DSP đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của các lĩnh vực như viễn thông, đa phương tiện, y học, xử lý ảnh và tương tác người-máy...

Để thấy rõ ảnh hưởng to lớn của xử lý tín hiệu số, ta xem ví dụ về sự phát triển của máy ảnh, từ máy ảnh tương tự truyền thống đến máy ảnh số ngày nay. Máy ảnh truyền thống hoạt động dựa trên các đặc điểm vật lý của thấu kính quang học, trong đó chất lượng bức ảnh càng đẹp khi hệ thống thấu kính càng to và rộng. Khi máy ảnh số mới ra đời với thấu kính nhỏ hơn thì chất lượng ảnh chụp thấp hơn nhiều so với tương tự. Tuy nhiên, khi năng lực xử lý của các bộ vi xử lý mạnh hơn và các thuật toán xử lý tín hiệu số tinh vi hơn được áp dụng thì các nhược điểm về quang học được khắc phục và chất lượng ảnh được cải thiện rõ rệt. Hiện nay, các máy ảnh số cho chất lượng ảnh vượt trội hơn so với tương tự. Hơn nữa, các máy ảnh số cài trong điện thoại di động hiện nay có thấu kính rất nhỏ nhưng vẫn có thể cho chất lượng ảnh rất tốt. Chất lượng ảnh ở đây phụ thuộc vào năng lực của DSP chứ không phải phụ thuộc vào kích thước của thấu kính quang học. Nói cách khác, công nghệ máy ảnh số đã sử dụng năng lực tính toán của DSP để khắc phục các hạn chế về vật lý.

Tóm lại, DSP là một lĩnh vực dựa trên nguyên ý của toán học, vật lý và khoa học máy tính và có những ứng dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

1.4 KHÁI NIỆM TẦN SỐ TRONG TÍN HIỆU LIÊN TỤC VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC

Từ vật lý chúng ta biết rằng tần số liên quan chặt chẽ với kiểu chuyển động có chu kỳ gọi là dao động và được mô tả bằng hàm sin. Khái niệm tần số liên quan trực tiếp đến khái niệm thời gian. Thực tế thì tần số có thứ nguyên là đảo ngược của thời gian. Do vậy bản chất của thời gian (liên tục hoặc rời rạc) sẽ có ảnh hưởng đến bản chất của tần số.

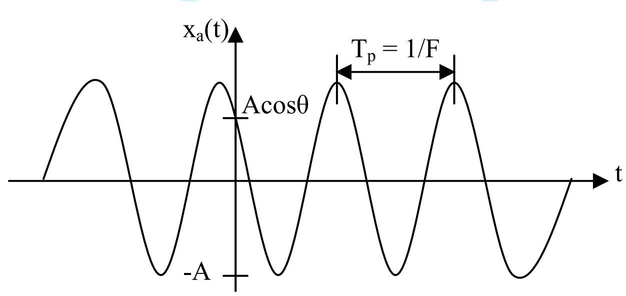
1.4.1 Tín hiệu sin liên tục

Một dao động điều hòa đơn giản được mô tả toán học bằng hàm sin liên tục sau:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta),\ -\infty<t<\infty$$

Tín hiệu này được xác định bởi 3 thông số: A là biên độ, Ω là tần số góc tính bằng radian trên giây (rad/s) và θ là góc pha tính bằng radian (rad) (hình 1.7). Thay vì dùng Ω, ta có thể dùng F tính bằng số chu kỳ trên giây hay hertz (Hz), ở đây: $\Omega = 2\pi F$. Vậy ta có thể viết lại:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft+\theta),\ -\infty<t<\infty$$



Hình 1.7 Tín hiệu sin liên tục

Tín hiệu sin liên tục ở trên có các đặc điểm sau đây:

1. Với F cố định, tín hiệu sin liên tục $x_a(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F$, nghĩa là ta luôn luôn có:

$$x_a(t+T_p) = x_a(t), -\infty < t < \infty$$

2. Các tín hiệu sin liên tục có tần số khác nhau thì khác nhau.
3. Việc tăng tần số sẽ dẫn đến tăng tốc độ của dao động của tín hiệu, tức là tăng số chu kỳ dao động trong một khoảng thời gian cho trước. Vì thời gian t liên tục nên ta có thể tăng F đến vô cùng.

Ta cũng có thể biểu diễn tín hiệu sin liên tục ở một dạng khác, thường được gọi là phasor như sau:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$

Theo cách biểu diễn phasor, có thể xem tín hiệu sin liên tục là tổng của 2 tín hiệu điều hòa hàm mũ phức có biên độ bằng nhau và liên hợp phức với nhau, tần số góc ở đây là $\pm\Omega$: tần số dương và âm. Để thuận tiện về mặt toán, ta sử dụng cả khái niệm tần số dương và âm. Vậy dải tần số của tín hiệu liên tục là $-\infty < F < \infty$.

1.4.2 Tín hiệu sin rời rạc

Tín hiệu sin rời rạc được biểu diễn như sau:

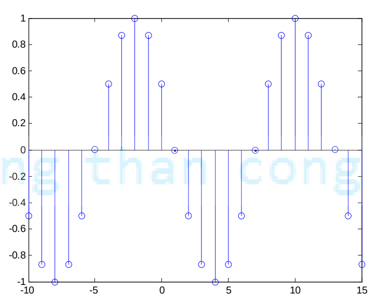
$$x(n) = A\cos(\omega n+\theta), -\infty<n<\infty$$

ở đây n là biến nguyên gọi là số mẫu, A là biên độ, ω là tần số góc tính bằng radian trên mẫu (rad/mẫu) và θ là góc pha tính bằng radian (rad).

Thay vì dùng ω, ta có thể dùng tần số f với quan hệ: $\omega = 2\pi f$. Ta viết lại x(n) như sau:

$$x(n) = A\cos(2\pi fn+\theta), -\infty<n<\infty$$

Tần số f có thứ nguyên là chu kỳ trên mẫu (chu kỳ/mẫu). Tạm thời bây giờ chúng ta chưa xét đến mối quan hệ giữa F và f, ta xem như tín hiệu sin rời rạc là độc lập với tín hiệu sin liên tục. Hình 1.8 là biểu diễn tín hiệu sin rời rạc với $\omega = \pi/6$ (rad/mẫu) và pha $\theta = \pi/3$ (rad).



Hình 1.8 *Tín hiệu sin rời rạc*

Khác với tín hiệu sin liên tục, tín hiệu sin rời rạc có các đặc điểm sau đây:

1. *Tín hiệu sin rời rạc tuần hoàn khi và chỉ khi tần số f là một số hữu tỷ.*

Từ định nghĩa, tín hiệu rời rạc x(n) tuần hoàn với chu kỳ N (N>0) khi và chỉ khi

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

Giá trị N nhỏ nhất được gọi là chu kỳ cơ bản.

Giả sử tín hiệu sin rời rạc tần số f_0 tuần hoàn, ta có:

$$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta]=\cos(2\pi f_0 n+\theta)$$

Quan hệ này chỉ đúng khi tồn tại một số nguyên k sao cho:

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \Leftrightarrow f_0 = \frac{k}{N}$$

Theo đây, ta thấy tín hiệu sin rời rạc chỉ tuần hoàn khi f_0 có thể biểu diễn dưới dạng tỷ của hai số nguyên, nghĩa là f_0 là một số hữu tỷ.

Để xác định chu kỳ cơ bản của tín hiệu sin rời rạc, ta biểu diễn f_0 dưới dạng tỷ của hai số nguyên k/N, sau đó đưa k/N về dạng phân số tối giản. Lúc đó mẫu số của phân số tối giản chính là chu kỳ cơ bản. Ví dụ $f_1 = 31/50$, nghĩa là $N_1 = 50$ hay $N_2 = 25/50 = 1/2$ nghĩa là $N_2 = 2$.

2. *Các tín hiệu sin rời rạc có tần số khác nhau một bội số nguyên lần 2π thì trùng nhau.*

Ta xét tín hiệu sin rời rạc $x(n) = \cos(\omega_0 n+\theta)$. Dễ dàng nhận thấy rằng:

$$x(n) = \cos[(\omega_0+2\pi)n+\theta]=\cos(\omega_0 n+2\pi n+\theta)=\cos(\omega_0 n+\theta)$$

Vậy tất cả các tín hiệu sin rời rạc có dạng:

$$x_k(n) = \cos(\omega_k n+\theta), k = 0,1,2,...$$

với

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi, -\pi \le \omega_0 \le \pi$$

đều trùng nhau. Nói cách khác, các tín hiệu sin rời rạc có tần số nằm trong dải $-\pi \le \omega \le \pi$ hay $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$ thì mới khác biệt nhau. Vì lý do đó nên ta gọi những tín hiệu sin rời rạc có tần số nằm ngoài dải $[-\pi,\pi]$ là *phiên bản (alias)* của những tín hiệu rời rạc có tần số nằm trong dải $[-\pi,\pi]$ tương ứng. Dải tần $-\pi \le \omega \le \pi$ được gọi là dải cơ bản. Nói rộng hơn, dải cơ bản là dải tần số có bề rộng là 2π. Như vậy, dải cơ bản cũng có thể là dải $0 \le \omega \le 2\pi$, $\pi \le \omega \le 3\pi$ ... Nhưng thực tế thường chọn dải cơ bản là:

$-\pi \le \omega \le \pi$ hay là $0 \le \omega \le 2\pi$

3. *Tốc độ cao nhất của tín hiệu sin rời rạc đạt được khi* $\omega = \pi$ *hay* $\omega = -\pi$*, tương đương với* $f = \frac{1}{2}$ *hay* $f = -\frac{1}{2}$

Ta có thể thấy rõ điều này qua ví dụ minh họa với tín hiệu $x(n) = \cos\omega_0 n$. Lần lượt cho $\omega_0 = 0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi$ ta có chu kỳ tương ứng là $N = \infty,16,8,4,2$. Ta thấy chu kỳ giảm khi tần số tăng, tức là tốc độ dao động của tín hiệu tăng.

1.4.3 Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức

Cũng như tín hiệu sin điều hòa, tín hiệu điều hòa hàm mũ phức đóng một vai trò quan trọng trong phân tích tín hiệu và hệ thống. Trong phần này chúng ta xét tín hiệu điều hòa hàm mũ phức trong cả miền thời gian liên tục và rời rạc.

1. Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức liên tục

Xét tín hiệu sau:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{jk2\pi F_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

Lưu ý rằng với mỗi k, tín hiệu $s_k(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là $1/(kF_0) = T_p/k$ và chu kỳ chung là T_p. Khi k khác nhau thì tín hiệu s_k (t) cũng khác nhau.

Từ s_k (t), ta có thể tổ hợp tuyến tính các tín hiệu $s_k(t)$ lại với nhau để tạo thành một tín hiệu tuần hoàn $x_a(t)$ với chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F_0$ như sau:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Biểu diễn này được gọi là khai triển Fourier của x_a (t), các hằng số phức c_k là các hệ số Fourier và $s_k(t)$ là các hài bậc k của $x_a(t)$

2. Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức rời rạc

Vì tín hiệu sin rời rạc chỉ tuần hoàn khi tần số là một số hữu tỷ nên ta chọn $f_0 = 1/N$ và định nghĩa tín hiệu điều hòa hàm mũ phức rời rạc là:

$$s_k(n) = e^{jk2\pi f_0 n} = e^{jk2\pi n/N} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

Khác với tín hiệu liên tục, ở đây ta thấy:

$$s_{k+N}(n) = e^{j2\pi(k+N)n/N} = e^{j2\pi n} s_k(n) = s_k(n)$$

Điều này nghĩa là khi chọn k sai khác nhau một bội số nguyên của N thì $s_k(n)$ sẽ trùng nhau, do đó ta chỉ cần xét với $k = n_0$ đến $k = n_0 + N - 1$. Để cho tiện, ta thường chọn $n_0 = 0$. Vậy ta có:

$$s_k(n) = e^{jk2\pi f_0 n} = e^{jk2\pi n/N} \quad k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Theo đó, tín hiệu s(n) tuần hoàn với chu kỳ cơ bản N có thể khai triển thành chuỗi Fourier như sau:

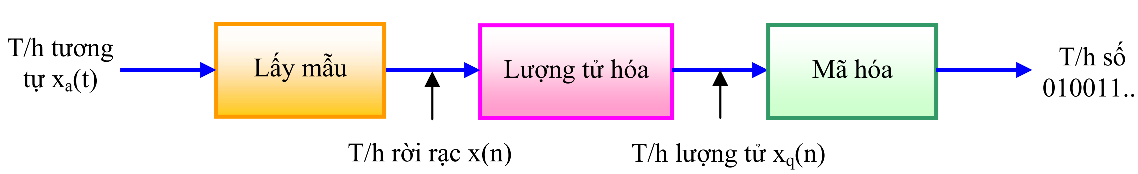
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

ở đây c_k là hệ số Fourier và s_k (n) là hài bậc k của x(n).

1.5 BIẾN ĐỔI TƯƠNG TỰ - SỐ (A/D)

Hầu hết các tín hiệu thực tế như tiếng nói, tín hiệu sinh học, tín hiệu địa chấn, radar, sonar, tín hiệu thông tin như audio, video... đều là tín hiệu tương tự. Để xử lý tín hiệu tương tự bằng phương pháp số, trước hết phải chuyển tín hiệu tương tự sang dạng số. Quá trình này gọi là biến đổi A/D.

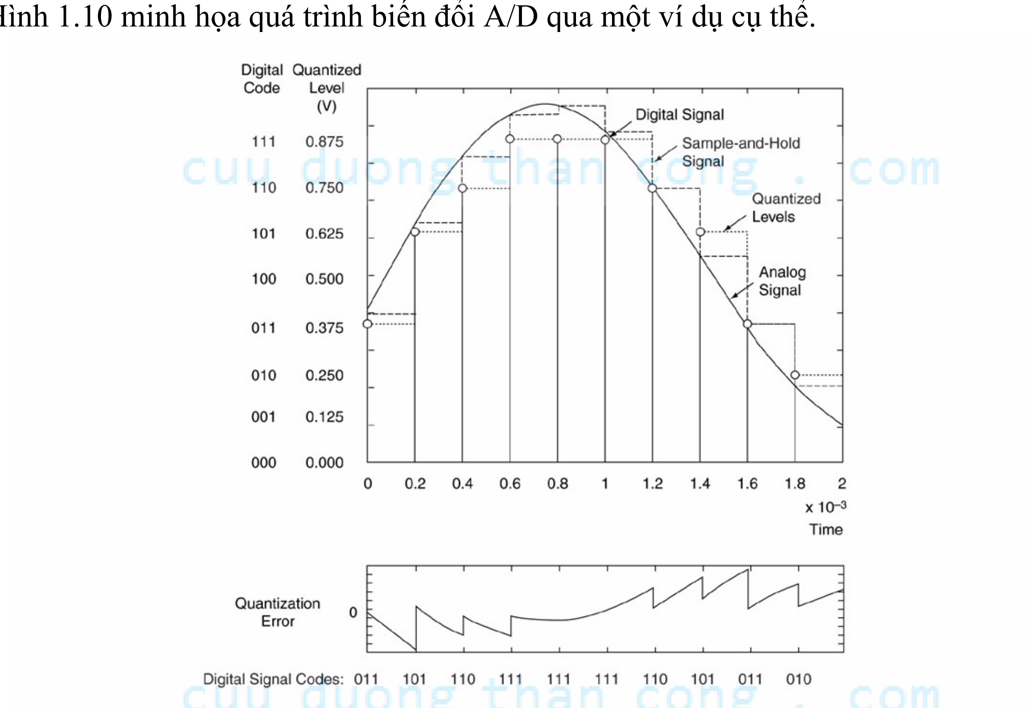
Quá trình A/D về cơ bản gồm 3 bước như minh họa trong hình 1.9.



Hình 1.9 Bộ chuyển đổi A/D cơ bản

1. *Lấy mẫu (sampling)* là quá trình chuyển đổi tín hiệu từ liên tục thành rời rạc bằng cách lấy từng *mẫu (sample)* của tín hiệu liên tục tại các thời điểm rời rạc. Vậy nếu tín hiệu $x_a(t)$ được đưa vào bộ lấy mẫu thì đầu ra là $x_a(nT) \equiv x(n)$ với T là chu kỳ lấy mẫu. Sau lấy mẫu, tín hiệu liên tục trở thành dãy các giá trị rời rạc và có thể lưu trữ trong bộ nhớ máy tính để xử lý. Thực tế thì giá trị của tín hiệu tại các thời điểm lấy mẫu thường được duy trì cho đến mẫu tiếp theo. Do đó quá trình lấy mẫu còn được gọi là *lấy mẫu và giữ mẫu (sample and hold).* Có thể nói quá trình lấy mẫu này là cầu nối giữa thế giới tương tự và thế giới số.
2. *Lượng tử hóa (quantization)* là quá trình chuyển đổi tín hiệu rời rạc có biên độ liên tục thành tín hiệu rời rạc có biên độ rời rạc (còn gọi là tín hiệu số). Mỗi mẫu tín hiệu được biểu diễn bằng một giá trị chọn từ trong tập hữu hạn các giá trị có thể có. Sự khác nhau giữa giá trị của mẫu chưa lượng tử hóa x(n) và giá trị của mẫu đã lượng tử hóa $x_q(n)$ gọi là *sai số lượng tử hóa (quantization error).* Nếu bỏ qua sai số này thì thuật ngữ tín hiệu rời rạc và tín hiệu số có thể sử dụng thay thế cho nhau.
3. *Số hóa (digitization)* là quá trình biểu diễn mỗi giá trị rời rạc $x_q(n)$ bằng một dãy số nhị phân b bit.

Hình 1.10 minh họa quá trình biến đổi A/D qua một ví dụ cụ thể.



Hình 1.10 Biến đổi A/D 3 bit

Trong phần này, ta sẽ xét chi tiết quá trình chuyển đổi A/D, gồm lấy mẫu, lượng tử hóa và mã hóa. Nếu băng thông của tín hiệu tương tự là hữu hạn và tần số lấy mẫu đủ lớn thì việc lấy mẫu sẽ không làm mất mát tín tức và không làm méo tín hiệu. Trong khi đó, lượng tử hóa là quá trình xấp xỉ hóa nên sẽ gây méo tín hiệu. Độ méo này phụ thuộc vào số bit b. Số bit tăng sẽ làm giảm méo nhưng dẫn đến giá thành tăng.

1.5.1 Lấy mẫu tín hiệu tương tự

Như đã giới thiệu ở trên, quá trình lấy mẫu được mô tả bởi quan hệ sau:

$$x(n) \equiv x_a(nT)$$

ở đây x(n) là tín hiệu rời rạc có được bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự $x_a(t)$ vào các thời điểm cách nhau T giây. Khoảng thời gian T giữa các mẫu cạnh nhau gọi là chu kỳ lấy mẫu và $F_s = 1/T$ gọi là tốc độ lấy mẫu (mẫu/s) hay tần số lấy mẫu (Hz).

Từ đây suy ra mối quan hệ giữa biến thời gian liên tục t và biến thời gian rời rạc n như sau:

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

Như vậy cũng sẽ tồn tại một quan hệ giữa biến tần số F (hay Ω) của tín hiệu liên tục và biến tần số f (hay ω) của tín hiệu rời rạc. Để thiết lập mối quan hệ này, ta xét tín hiệu sin liên tục sau:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta)$$

Lấy mẫu tín hiệu này với tần số $F_s = 1/T$ (mẫu/s), ta được tín hiệu rời rạc sau:

$$x_a(nT) \equiv x(n) = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right)$$

So sánh tín hiệu này với tín hiệu sin rời rạc đã xét trong (1.4.2), ta được quan hệ giữa F và f là quan hệ tuyến tính như sau:

$$f = \frac{F}{F_s}$$

Điều này tương đương với:

$$\omega = \Omega T$$

Tần số f còn được gọi là *tần số chuẩn hóa (normalized frequency)* hay tần số số. Ta có thể sử dụng tần số f để tính tần số F (Hz) nếu biết tần số lấy mẫu.

Kết hợp các dải biến thiên của tần số F (hay Ω) và f (hay ω) với quan hệ vừa tìm ra, ta có bảng tóm tắt 1.1 sau:

Tín hiệu liên tục		**Tín hiệu rời rạc**
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi f$
[rad/s] [Hz]		[rad/mẫu] [chu kỳ/mẫu]
$-\infty < \Omega < \infty$ $-\infty < F < \infty$	$\omega = \Omega T, \quad f = F/F_s$ $\Longrightarrow$	$-\pi \le \omega \le \pi$ $-1/2 \le f \le 1/2$
$-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$ $-F_s/2 \le F \le F_s/2$	$\Longleftarrow$ $\Omega = \omega/T, \quad F = f.F_s$	

Bảng 1.1 *Quan hệ giữa các biến tần số*

Từ quan hệ trên, ta thấy điểm khác biệt chính giữa tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc là dải biến thiên của tần số F và f (hay Ω và ω). Việc lấy mẫu một tín hiệu liên tục chính là sắp xếp dải tần số vô hạn của biến F (hay Ω) vào dải tần số hữu hạn của biến f (hay ω). Vì tần số cao nhất của tín hiệu rời rạc là f = ½ (hay ω = π) nên với tần số lấy mẫu là F_s, tần số tương ứng cao nhất của F và Ω là:

$$F_{max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\Omega_{max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

Như vậy, tần số cao nhất của tín hiệu liên tục khi lấy mẫu với tần số F_s là $F_{max} = F_s/2$. Khi tần số của tín hiệu liên tục lớn hơn tần số $F_s/2$ thì sẽ xảy ra sự *mập mờ (ambiguity)*hay còn gọi là *chồng phổ (aliasing).* Ta có thể thấy rõ điều này qua ví dụ minh họa sau:

Cho 2 tín hiệu sin khác nhau có tần số lần lượt là 10 Hz và 50 Hz :

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$$

$$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t$$

Lấy mẫu 2 tín hiệu này với tần số $F_s = 40$Hz, tín hiệu rời rạc là :

$$x_1(n) = \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos\frac{\pi}{2}n$$

$$x_2(n) = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos\frac{5\pi}{2}n$$

Nhận xét thấy $x_2(n) = x_1(n)$. Như vậy, 2 tín hiệu sin rời rạc này không phân biệt được với nhau. Ta nói tần số 50 Hz là phiên bản của tần số 10 Hz tại tần số lấy mẫu là 40 Hz.

Ta có thể suy ra tổng quát là tần số $(F_0 + kF_s)$ (Hz) là phiên bản của tần số F_0 (Hz) tại tần số lấy mẫu là F_s (Hz).

Từ ví dụ trên, ta có thể dễ dàng thấy tần số cao nhất để không xảy ra sự chồng phổ là 20 Hz. Đây chính là $F_s/2$ tương ứng với $\omega = \pi$. Tần số $F_s/2$ còn được gọi là *tần số gập (folding frequency),* vì để xác định tần số phiên bản (lớn hơn $F_s/2$), ta có thể chọn $F_s/2$ làm điểm chốt rồi gập (hay phản xạ) tần số phiên bản vào dải cơ sở $[0, F_s/2]$.

Ví dụ 1.1

Cho tín hiệu tương tự:

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t$$

(a) Xác định tần số lấy mẫu nhỏ nhất để tránh chồng phổ

(b) Giả sử tín hiệu trên được lấy mẫu với tần số $F_s = 200$ Hz, tín hiệu rời rạc sau lấy mẫu là gì ?

(c) Giả sử tín hiệu trên được lấy mẫu với tần số $F_s = 75$ Hz, tín hiệu rời rạc sau lấy mẫu là gì ?

(d) Xác định tần số $(0 < F < F_s)$ của tín hiệu sin mà có các mẫu trùng với các mẫu của tín hiệu (c)

1.5.2 Định lý lấy mẫu

Cho một tín hiệu tương tự, ta chọn tần số lấy mẫu như thế nào ? Để trả lời câu hỏi này, ta phải có một số thông tin chi tiết về các đặc điểm của tín hiệu được lấy mẫu, bao gồm biên độ, tần số và pha của các thành phần tần số khác nhau. Tuy nhiên, những thông tin như vậy thì ta lại không được biết trước. Ta chỉ có thể biết được tần số lớn nhất của một lớp tín hiệu nào đó (như là lớp tín hiệu tiếng nói, lớp tín hiệu video...). Dựa vào tần số lớn nhất này, ta có thể xác định được tần số lấy mẫu cần thiết để chuyển tín hiệu từ tương tự sang số.

Vì tần số lớn nhất này có thể thay đổi chút ít trong các tín hiệu cùng lớp (ví dụ tiếng nói của những người nói khác nhau thì có tần số lớn nhất khác nhau) nên để đảm bảo tần số lớn nhất không vượt quá $F_s/2$ (để tránh chồng phổ) thì trước khi lấy mẫu tín hiệu, ta cho nó đi qua một bộ lọc, lọc bỏ các tần số trên $F_s/2$. Bộ lọc này được gọi là *lọc chống chồng phổ (anti-aliasing filter)*

Từ tần số F_{max} đã biết, ta có thể chọn tần số lấy mẫu tương ứng $F_s > 2F_{max}$

Với tần số lấy mẫu như thế này, tất cả các thành phần tần số của tín hiệu tương tự được biểu diễn dưới dạng các mẫu mà không bị chồng phổ, và do vậy, ta có thể khôi phục lại tín hiệu tương tự từ các mẫu rời rạc mà không bị méo bằng cách sử dụng một phương pháp nội suy thích hợp. Công thức nội suy được trình bày trong định lý lấy mẫu như sau :

Nếu tần số cao nhất trong tín hiệu liên tục $x_a(t)$ là F_{max} và tín hiệu được lấy mẫu với tần số $F_s>2F_{max}$ thì có thể khôi phục chính xác $x_a(t)$ từ các mẫu rời rạc $x_a(nT)$ bằng cách sử dụng công thức nội suy sau :

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin 2\pi F_{max}(t-nT)}{2\pi F_{max}(t-nT)}$$

Tần số lấy mẫu $F_s = 2F_{max}$ được gọi là tần số Nyquist (do Nyquist tìm ra năm 1928)- là tần số lấy mẫu nhỏ nhất để tránh chồng phổ.

Chứng minh (xem SGK)

Ví dụ 1.2

Cho tín hiệu tương tự :

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Xác định tần số Nyquist.

Ví dụ 1.3

Cho tín hiệu tương tự :

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

(a) Xác định tần số Nyquist

(b) Giả sử tín hiệu được lấy mẫu với tốc độ 5000 (mẫu/s), tìm tín hiệu rời rạc có được sau lấy mẫu

(c) Xác định tín hiệu tương tự $y_a(t)$ khôi phục từ tín hiệu rời rạc (giả sử nội suy lý tưởng)

1.5.3 Quan hệ giữa phổ của tín hiệu rời rạc và phổ của tín hiệu liên tục

Lấy mẫu tín hiệu tương tự $x_a(t)$, về mặt toán học chính là:

$$x_s(t) = x_a(t).s(t)$$

Trong đó $x_s(t)$ là tín hiệu sau lấy mẫu, s(t) là dãy xung vuông tuần hoàn chiều cao h, độ rộng xung là τ, chu kỳ là T và có $\tau \to 0$, $h\tau \to 1$. Khai triển Fourier cho dãy s(t) trên rồi lấy giới hạn, ta được :

$$s(t) = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ h\tau\to 1}} \frac{h\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi \frac{\tau}{T}}{k\pi \frac{\tau}{T}} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Vậy có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc dưới dạng sau :

$$x_s(t) = \frac{1}{T} x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Từ đây ta tìm được phổ của tín hiệu rời rạc theo công thức biến đổi Fourier như sau :

$$X_s(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k=-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\Omega - k\frac{2\pi}{T})t} dt$$

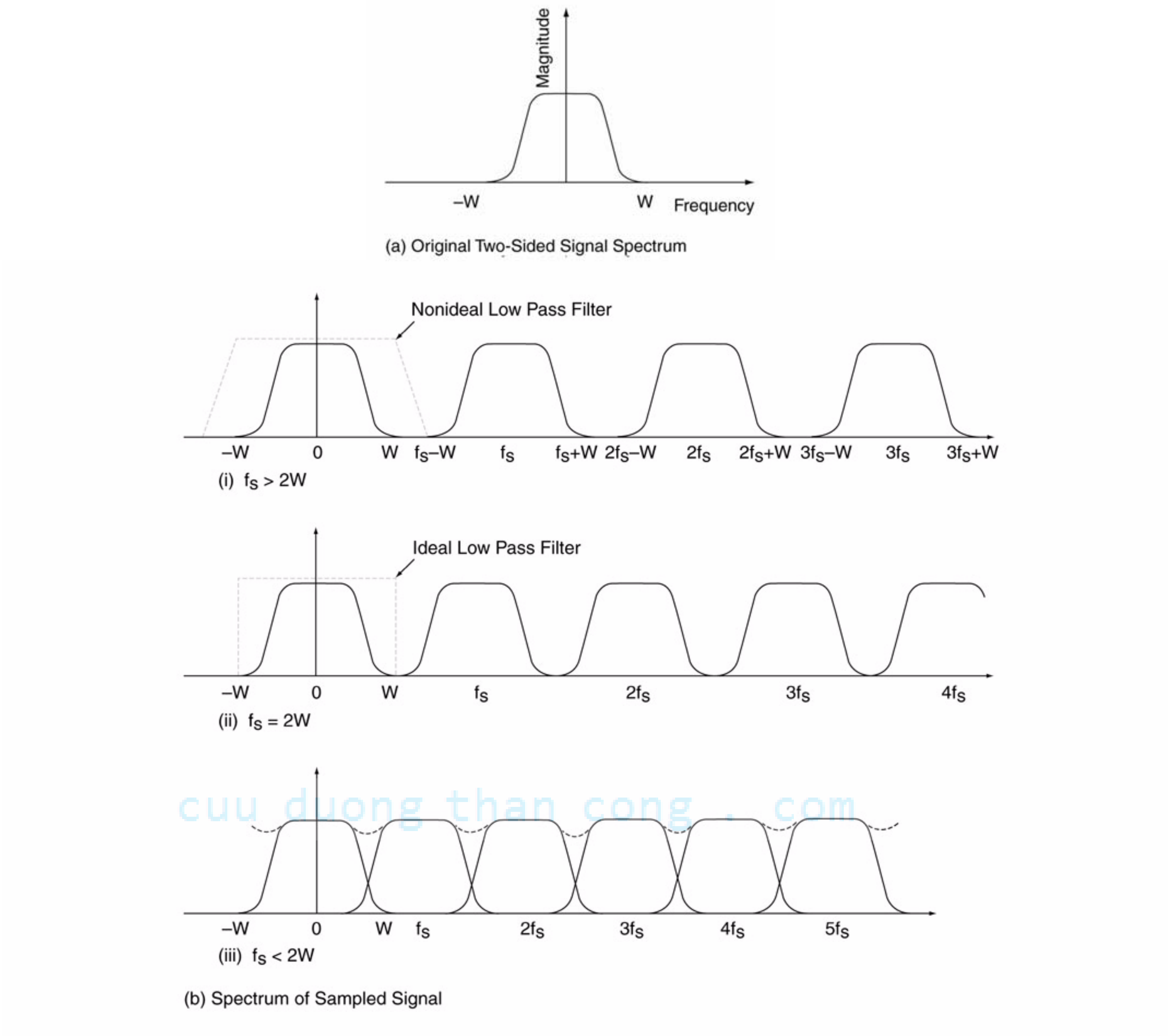
$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - kF_s\right)$$

Từ đây ta có kết luận: phổ của tín hiệu rời rạc là xếp chồng tuần hoàn của phổ của tín hiệu liên tục với chu kỳ là F_s.

Như vậy việc lấy mẫu tín hiệu liên tục tạo ra một dãy mẫu rời rạc trong miền thời gian và đồng thời cũng có ảnh hưởng trong miền tần số nữa. Hình vẽ 1.11a là phổ 2 phía của tín hiệu gốc chưa lấy mẫu và hình vẽ 1.11b là phổ của tín hiệu rời rạc được lấy mẫu với 3 tần số lấy mẫu khác nhau, ở đây W là băng thông của tín hiệu tương tự- cũng chính là tần số cao nhất F_{max}

Qua đây ta thấy các phổ của tín hiệu rời rạc khác nhau khi lấy mẫu với các tần số khác nhau. Nếu lấy mẫu với tần số trên tần số Nyquist $F_s \geq 2F_{max} = 2W$ thì các bản copy của phổ gốc (gọi là ảnh phổ) không bị chồng lên nhau. Lúc này ta có thể khôi phục lại tín hiệu gốc ban đầu từ tín hiệu rời rạc bằng cách cho tín hiệu rời rạc đi qua bộ lọc thông thấp tần số cắt là $F_{max} = W$. Bộ lọc này được gọi là bộ lọc khôi phục hay *bộ lọc ảnh phổ (anti-imaging filter).* Nếu lấy mẫu với tần số thấp hơn tần số Nyquist thì các ảnh phổ sẽ bị chồng lên nhau, phổ tổng là đường nét đứt trên hình 1.11b(iii), lúc này ta không thể khôi phục lại tín hiệu gốc ban đầu.

Khi tín hiệu là thông dải ($W_1 < F < W_2$), ta không cần lấy mẫu với tần số gấp đôi tần số lớn nhất. Thay vào đó, tần số lấy mẫu phụ thuộc vào băng thông của tín hiệu $W_2 - W_1$ cũng như



__Hình 1.11__ Phổ của tín hiệu gốc và tín hiệu rời rạc

__Hình 1.11__ Phổ của tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

vị trí của phổ trên trục tần số. Tần số lấy mẫu ít nhất là gấp đôi băng thông của tín hiệu. Điều quan trọng ở đây là phải chọn tần số lấy mẫu sao cho hiện tượng chồng phổ không xảy ra.

Ví dụ 1.4

Cho một tín hiệu liên tục có phổ từ 120-160 kHz. Vẽ phổ 2 phía của tín hiệu rời rạc có được bằng cách lấy mẫu tín hiệu trên với 3 tần số lấy mẫu khác nhau sau đây :

(a) $F_s = 80\ kHz$

(b) $F_s = 100\ kHz$

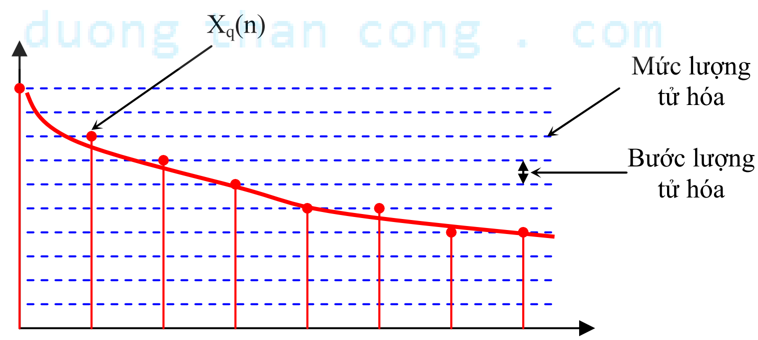
(c) $F_s = 120\ kHz$

Tần số lấy mẫu thích hợp là bao nhiêu trong 3 tần số trên ? Giải thích.

1.5.4 Lượng tử hóa tín hiệu có biên độ liên tục

Như đã trình bày trên đây, lượng tử hóa chính là biến đổi tín hiệu rời rạc có biên độ liên tục thành tín hiệu có biên độ rời rạc bằng cách biểu diễn mỗi mẫu x(n) bằng một giá trị $x_q(n)$ chọn từ một tập hữu hạn các giá trị biên độ. Hình 1.12 minh họa hoạt động lượng tử hóa. Qua đây ta thấy lượng tử hóa gây ra lỗi lượng tử, là sai khác giữa giá trị lượng tử và giá trị thực sự của mẫu. Gọi $e_q(n)$ là sai số lượng tử hóa, ta có :

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$



__Hình 1.12__ Minh họa sự lượng tử hóa

Về mặt toán, lượng tử hóa chính là làm tròn hay cắt gọt các giá trị của các mẫu rời rạc. Gọi giá trị lượng tử hóa là mức lượng tử hóa, khoảng cách giữa hai mức lượng tử hóa cạnh nhau là bước lượng tử hóa Δ, sai số lượng tử hóa trong trường hợp làm tròn nằm trong giới hạn là:

$$-\frac{\Delta}{2} \le e_q(n) \le \frac{\Delta}{2}$$

Nếu x_{min} và x_{max} là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x(n) và L là số mức lượng tử hóa thì :

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1}$$

Ta gọi $x_{max} - x_{min}$ là dải động của tín hiệu và Δ là độ phân giải. Lưu ý rằng khi dải động cố định thì việc tăng số mức lượng tử hóa sẽ làm giảm kích thước bước lượng tử hóa, lỗi lượng tử hóa giảm và độ chính xác trong chuyển đổi A/D tăng lên.

Về lý thuyết thì lượng tử hóa luôn làm mất mát thông tin. Lý do là tất cả các mẫu có giá trị nằm trong dải $-\frac{\Delta}{2} \le x(n) < \frac{\Delta}{2}$ đều được lượng tử hóa thành cùng một giá trị.

Chất lượng của tín hiệu ra bộ chuyển đổi A/D được biểu diễn bằng tỷ số tín hiệu trên nhiễu lượng tử hóa SQNR (signal-to-quantization noise ratio) :

$$\mathrm{SQNR} = \frac{P_x}{P_q}$$

Trong đó P_x là công suất trung bình của tín hiệu liên tục và P_q là công suất trung bình của lỗi lượng tử hóa.

Giả sử ta xét lượng tử hóa tín hiệu sin liên tục chu kỳ T_0.

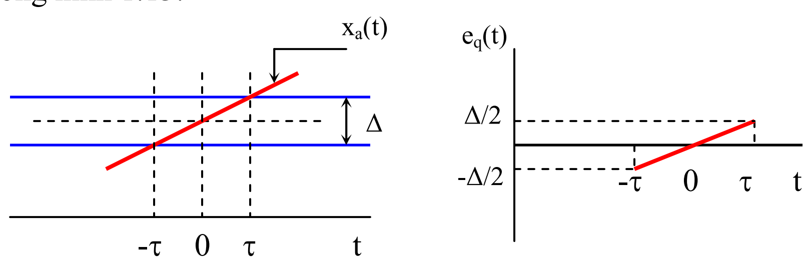
Công suất trung bình của tín hiệu là :

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} (A\cos\frac{2\pi}{T_0}t)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

Nếu lấy mẫu đúng với định lý lấy mẫu thì lượng tử hóa là quá trình duy nhất gây ra lỗi trong chuyển đổi A/D. Do đó, ta có thể tính lỗi lượng tử hóa bằng cách lượng tử hóa tín hiệu $x_a(t)$ thay cho tín hiệu rời rạc x(n). Tín hiệu $x_a(t)$ hầu như là tuyến tính trong khoảng giữa hai mức lượng tử hóa cạnh nhau. Lỗi lượng tử hóa là :

$$e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$$

như chỉ ra trong hình 1.13.



Hình 1.13 Lỗi lượng tử hóa trong trường hợp lượng tử hóa tín hiệu sin

Công suất lỗi P_q được tính là:

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_q^2(t)dt$$

Vì $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t, -\tau \le t \le \tau$ nên ta có:

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2 dt = \frac{\Delta^2}{12}$$

Nếu bộ lượng tử hóa có b bit và dải động là 2A thì $\Delta = 2A/2^b$. Do đó:

$$P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$$

Như vậy SQNR tính theo dB là:

$$\mathrm{SQNR(dB)} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_q}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}.2^b\right) = 6.02b + 1.76$$

Qua đây ta thấy khi tăng số bit thêm 1 thì SQNR tăng thêm 6dB

Ví dụ 1.5

Lượng tử hóa tín hiệu tương tự điện áp từ -5V đến 5V dùng 3 bit. Xác định giá trị lượng tử hóa và lỗi lượng tử hóa cho các mẫu sau:

(a) -3.4V

(b) 0V

(c) 0.625V

1.5.6 Mã hóa các mẫu lượng tử hóa

Quá trình mã hóa sẽ gán cho mỗi mẫu lượng tử hóa một số nhị phân. Nếu ta có L mức lượng tử hóa, ta cần ít nhất L số nhị phân. Với từ mã dài b bit ta có 2^b số nhị phân khác nhau. Như vậy yêu cầu:

$$b \geq \log_2 L$$

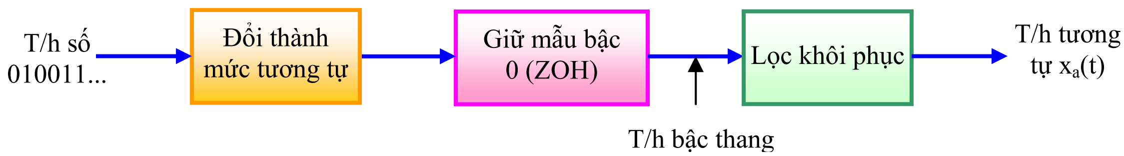
Nói chung, tốc độ lấy mẫu càng cao và độ phân giải lượng tử hóa càng cao (b lớn) thì thiết bị chuyển đổi A/D càng đắt tiền.

Trong thực tế, quá trình lượng tử hóa và mã hóa gộp chung lại thành một. Hình 1.14 trình bày bộ chuyển đổi A/D thực tế.

***Hình 1.14** Bộ chuyển đổi A/D thực tế*

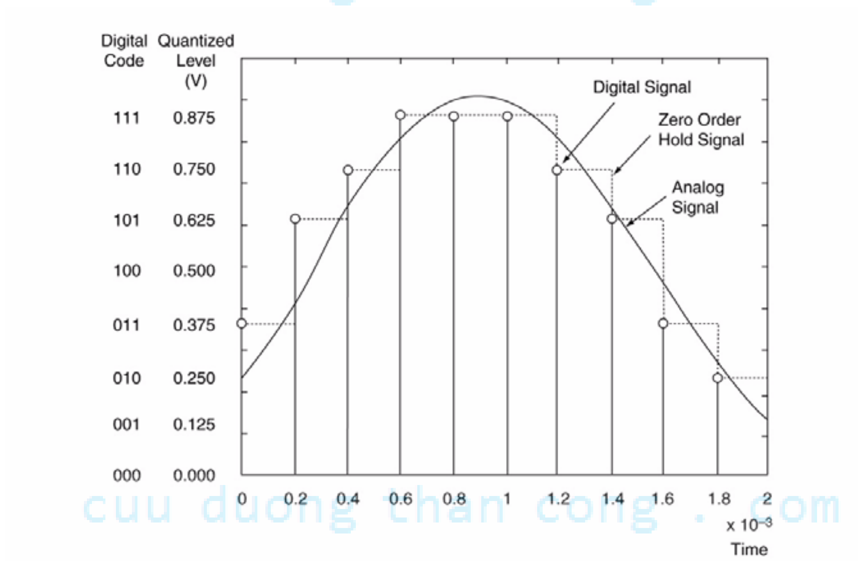
1.6 BIẾN ĐỔI SỐ - TƯƠNG TỰ (D/A)

Trong một số trường hợp, có thể dùng trực tiếp tín hiệu số sau xử lý. Tuy nhiên, hầu hết các ứng dụng đều yêu cầu phải chuyển đổi tín hiệu số sau xử lý trở lại thành tín hiệu tương tự. Bộ chuyển đổi số-tương tự (D/A) được trình bày trên hình 1.15. Trước tiên, một mạch sẽ thực hiên chuyển đổi các từ mã b bit thành các mức tương tự tương ứng. Các mức này được duy trì trong khoảng 1 chu kỳ lấy mẫu nhờ bộ giữ mẫu bậc 0 (còn gọi là ZOH-Zero Order Hold). Tín hiệu ra của ZOH có dạng bậc thang, các sườn nhọn của tín hiệu bậc thang chứa các tần số cao. Các tần số cao này được loại bỏ nhờ một bộ lọc khôi phục. Bộ lọc này chính là bộ lọc loại bỏ các ảnh phổ tạo ra do lấy mẫu.



***Hình 1.15** Bộ chuyển đổi D/A*

Hình 1.16 minh họa quá trình chuyển đổi D/A 3 bit.



***Hình 1.16** Chuyển đổi D/A 3 bit*